



Tanıtım

Tema: Eşlik ve Benzerlik

Konu: Eşlik ve Benzerlik

Alt Konu: Geometrik Dönüşümler

Temanın Amacı: Geometrik Dönüşümlerle İlgili Çıkarım Yapabilme

Anahtar Kavramlar: Yansıma, Öteleme, Döndürme



Köprü Kurma

Türk kültürüne ait sanat eserlerinde sıklıkla geometriden yararlanılmış, özellikle medrese, cami gibi mimari eserlerdeki süsleme uygulamalarında, halı ve kilimlerde geometrik dönüşümler kullanılmıştır.



Bilgisayar oyunlarında ve animasyonlarda, karakterler ve nesnelere hareket ettirilirken geometrik dönüşümler kullanılır. Bir karakterin hareketi öteleme, ekran boyunca dönmesi döndürme ve simetrik hareketleri yansıma ile sağlanır.

Robotikte, bir robotun bir nesneye doğru yönelmesi veya bir nesneyi belirli bir açıyla kavraması geometrik dönüşüm işlemleri ile sağlanır.

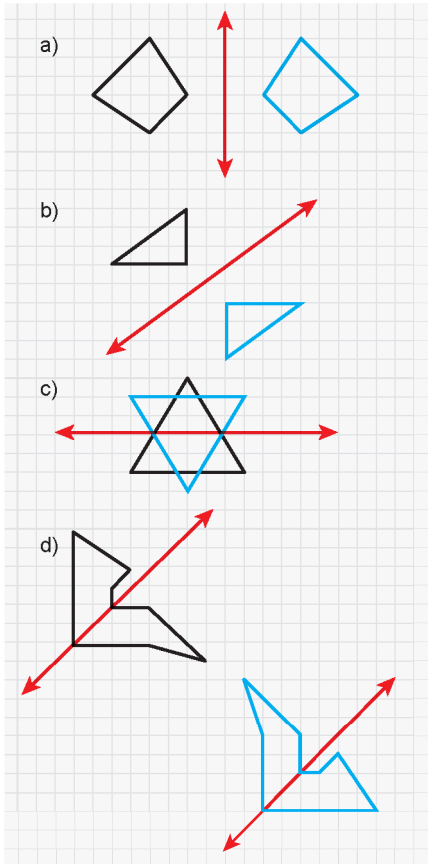
Yansıma Dönüşümü

- Düzlemde bir şeklin bir doğruya göre yansıma dönüşümü şekil üzerindeki tüm noktaların o doğruya göre simetriği olan noktalar belirlenerek bulunur.
- Bir şeklin yansımasının alındığı doğruya yansıma doğrusu adı verilir.
- Şekil üzerindeki bir nokta ve görüntüsünün yansıma doğrusuna olan uzaklıkları eşittir.
- Bir şekil ile bu şeklin bir doğruya göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü eşittir.
- Bir şekle yansıma dönüşümü uygulandığında şeklin yeri ve yönü değişir.



Örnek 1

Aşağıda verilen şekillerin verilen doğrulara göre yansıma dönüşümü altındaki görüntülerini bulunuz.

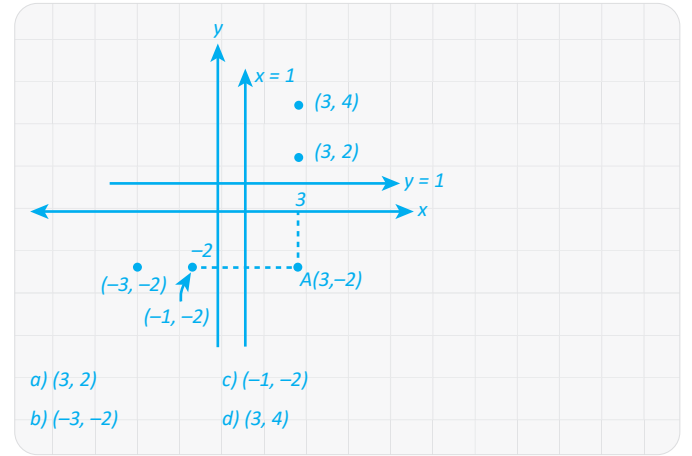


Örnek 2

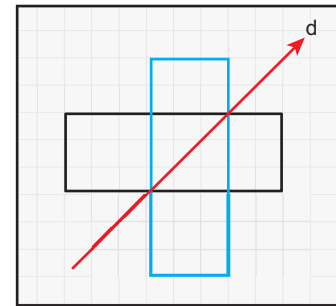
Dik koordinat düzlemi çizerek $A(3, -2)$ noktasının

- x eksenine
- y eksenine
- $x = 1$ doğrusuna
- $y = 1$ doğrusuna

göre yansıma dönüşümü altındaki noktalarını bulunuz.



Örnek 3

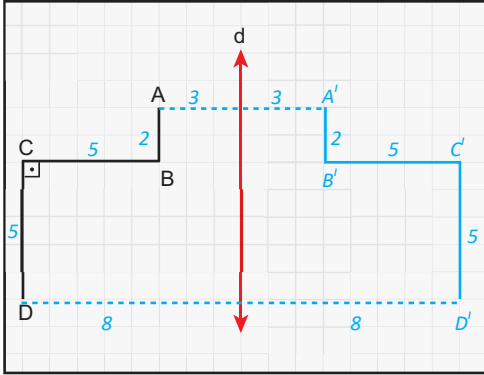


Şekilde birim kareli zeminde verilen dikdörtgenin d doğrusu altındaki yansıması ile üst üste geldiği bölgenin alanını bulunuz.

$3 \cdot 3 = 9$ birim kare



Örnek 4



Yukarıda birim kareli zeminde verilen şeklin d doğrusuna göre yansıması olan şekil $A'B'C'D'$ olduğuna göre, $ABCDD'C'B'A'$ bölgesinin çevresi kaç birimdir?

Şeklin çevresi 46 birim olur.

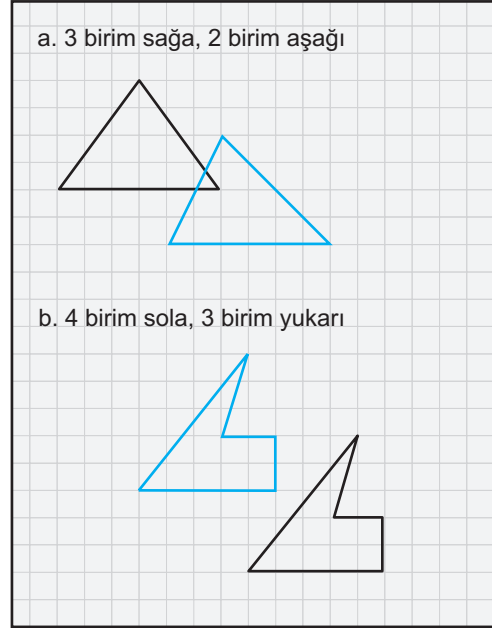
Öteleme Dönüşümü

- Düzlemde bir şeklin belirli bir uzaklık ve yönde öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü, o şekil üzerindeki tüm noktaların belirtilen yön ve uzaklıkta ilerletilmesiyle oluşur.
- Şekil üzerindeki tüm noktaların öteleme dönüşümü altındaki görüntüsünde elde edilen noktalara uzaklıkları eşittir.
- Bir şekil öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü ile eşittir.
- Bir şekle öteleme dönüşümü uygulandığında şeklin yeri değişir fakat yönü değişmez.
- Öteleme dönüşümünün bileşenleri, dönüşümün uygulandığı doğrultu, yön ve uzaklıktır.

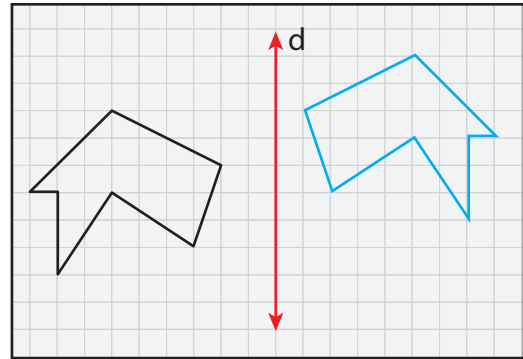


Örnek 5

Aşağıdaki birim kareli zeminde verilen şekillerin belirtilen yön ve uzaklıktaki öteleme dönüşümü altındaki görüntülerini bulunuz.



Örnek 6



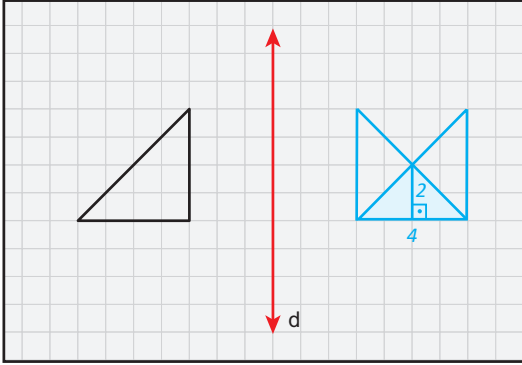
Yukarıda birim kareli zeminde verilen şekle

- d doğrusuna göre yansıma dönüşümü
- 1 birim sola öteleme dönüşümü
- 2 birim yukarı öteleme dönüşümü

uygulayınız.



Örnek 7



Yukarıda birimkareli zeminde verilen üçgene önce

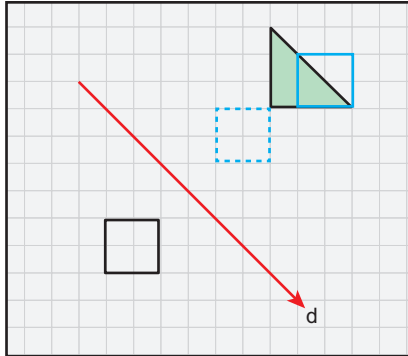
- d doğrusuna göre yansıma dönüşümü
- daha sonra yine aynı üçgene 10 birim sağa öteleme dönüşümü

uygulanırsa elde edilen görüntülerin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanı kaç birim kare olur?

$$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ birim kare bulunur.}$$



Örnek 8



Şekilde birimkareli zeminde verilen karenin d doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsüne 3 birim sağa, 2 birim yukarı öteleme dönüşümü uygulanırsa karenin içinde kalan yeşil bölgenin alanını bulunuz.

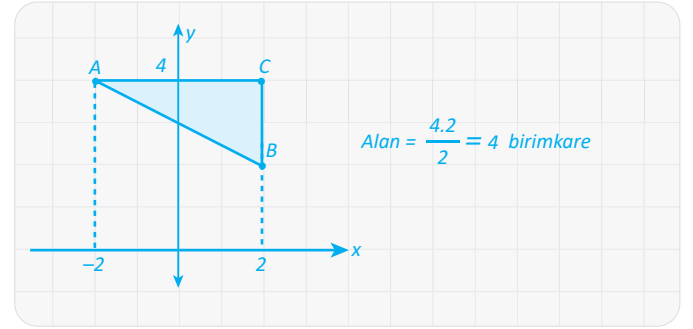
$$\text{Alan} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$



Örnek 9

Dik koordinat düzlemi çiziniz. A(-2, 4) noktasının 4 birim sağa, 2 birim aşağı öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü B, y eksenine göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü C noktası olsun.

Buna göre, ABC üçgeninin alanını bulunuz.

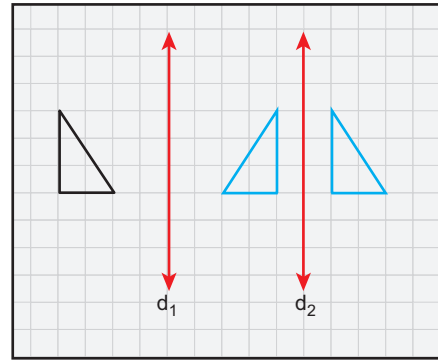


Not

Düzlemde bir şekle paralel doğrulara göre sırasıyla iki kez yansıma dönüşümü uyguladığında şekil, doğrular arasındaki uzaklığın iki katı kadar uzaklığa ötelenmiş olur. Elde edilen şekil, ilk şeklin öteleme dönüşümü altındaki görüntüsüdür.



Örnek 10



Şekildeki üçgenin d_1 doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsünün d_2 doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsüne hangi öteleme dönüşümü uygulanırsa ilk şekil ile tamamen çakışır?

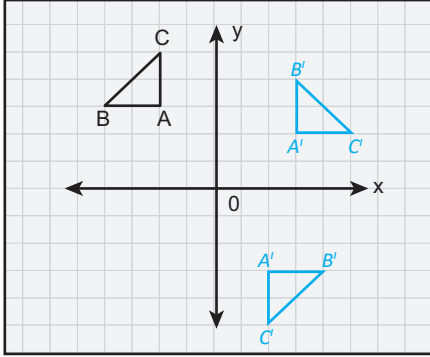
10 birim sola öteleme dönüşümü

Dönme Dönüşümü

- Düzlemdeki bir şeklin bir nokta etrafındaki dönme dönüşümü altındaki görüntüsü, şekil üzerindeki tüm noktaların verilen nokta etrafında verilen açı ölçüsünde çembersel bir yol üzerinde hareket ettirilmesiyle elde edilir.

- Etrafında döndürülen noktaya dönme merkezi, döndürülen açıya dönme açısı denir.
- Bir şekle dönme dönüşümü uygulandığında şekil üzerindeki herhangi bir nokta ile bu noktaların görüntüsünün dönme merkezine uzaklıkları aynıdır.
- Bir şeklin dönme dönüşümü altındaki görüntüsü ile şekil eşittir.

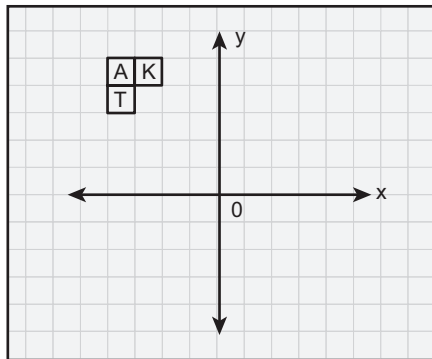
Örnek 11



Yukarıda dik koordinat düzleminde verilen üçgenin orijin etrafında saat yönünde

- 90° lik dönme dönüşümü altındaki görüntüsünü
- 180° lik dönme dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

Örnek 12

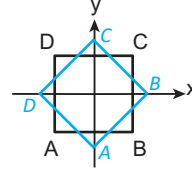


Yukarıda dik koordinat düzleminde verilen şekil başlangıç noktası etrafında saatin dönme yönünün tersine 90° döndürülürse elde edilen görüntüyü bulunuz.



Çıkış Soru 1

Dik koordinat düzleminde köşe noktalarının koordinatları $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$ olan ABCD karesi aşağıda verilmiştir.



Bu kare sırasıyla

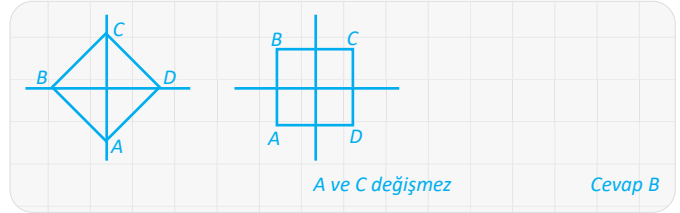
- orijin etrafında saat yönünün tersine 45° döndürme,
- y – eksenine göre yansıma,
- orijin etrafında saat yönünde 45° döndürme

dönüşümleri uygulanıyor.

Son durumda bu karenin koordinatları değişmeyen köşe noktaları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) A ve B B) A ve C C) A ve D
D) B ve C E) C ve D

(2018 AYT)



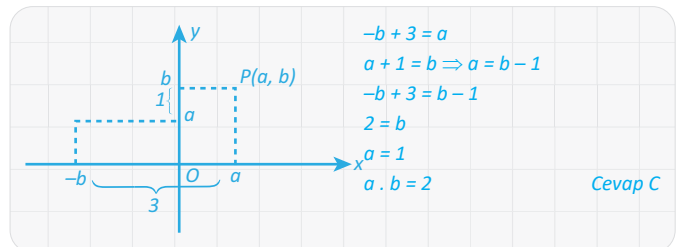
Çıkış Soru 2

Dik koordinat düzleminde bir $P(a, b)$ noktası orijin etrafında saatin dönme yönünün tersine 90° döndürüldükten sonra elde edilen nokta; x eksenini boyunca pozitif yönde 3 birim, y eksenini boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenildiğinde yine $P(a, b)$ noktası elde ediliyor.

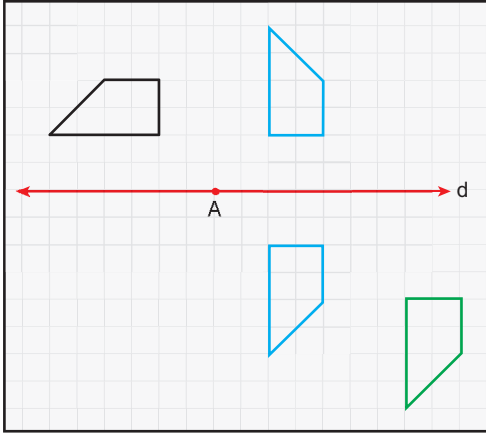
Buna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(2019 AYT)



Örnek 13

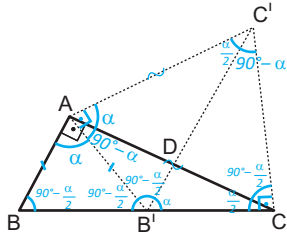


Yukarıdaki şekilde siyah renkle çizilen dörtgene sırasıyla dönme, yansıma ve öteleme dönüşümleri uygulanarak yeşil renkli dörtgen elde edilmiştir.

Uygulanan dönüşüm işlemlerini yazınız.

- A noktası etrafında saatin dönme yönünde 90° lik dönme dönüşümü
- d doğrusuna göre yansıma dönüşümü
- Sağa doğru 5 birim ve aşağı doğru 2 birim öteleme dönüşümü

Örnek 14



ABC üçgenine A köşesi etrafında saatin dönme yönünün tersine α açısı kadar dönme dönüşümü uygulandığında $AB'C'$ üçgeni oluşuyor.

Buna göre,

- I. $m(\widehat{BCC'}) = 90^\circ$
- II. $m(\widehat{CB'C'}) = \alpha$
- III. $|C'D| = |C'C|$

yargularından hangileri kesinlikle doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

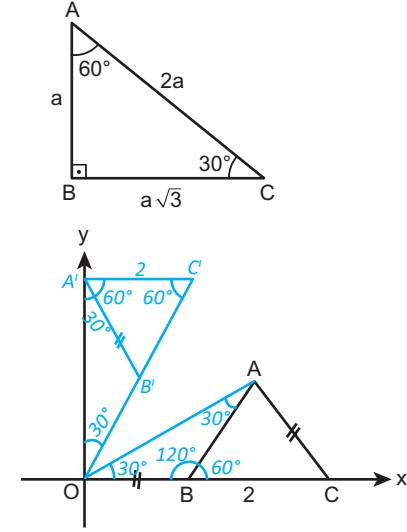
Şekilde bulunan açılara göre

- I. Doğrudur
- II. Doğrudur
- III. Doğru değildir

Cevap C

Örnek 15

Bilgi:



Dik koordinat düzleminde verilen ABC eşkenar üçgeninin bir kenarı 2 birimdir.

$|OB| = |AC|$ olmak üzere, bu üçgen orijin etrafında saatin dönme yönünün tersine 60° döndürülürse $A'B'C'$ üçgeni oluşuyor. C' noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $(2\sqrt{3}, 2)$ B) $(2, 2\sqrt{3})$ C) $(2, 4)$
D) $(4, 2)$ E) $(2, \sqrt{3}, 4)$

$C'(2, 2\sqrt{3})$

Cevap B

Not

Düzlemde bir şekle kesiksen doğrulara göre sırasıyla iki kez yansıma dönüşümü uygulandığında şekil üzerindeki noktalar çembersel bir yol izler.

Bu dönüşüm, doğruların kesim noktası dönme merkezi, doğrular arasındaki açının ölçüsünün iki katı dönme açısı olan bir dönme dönüşümüdür.

Örnek Cevap Cevap Anahtarı

2. a) (3, 2), b) (-3, -2), c) (-1, -2), d) (3, 4) 3. 9 4. 46 7. 4 8. 2
9. 4 10. 10 birim sola 14. C 15. B

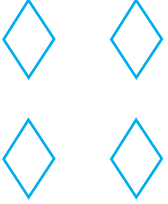
Çıkış Soru Cevap Anahtarı

1. B 2. C

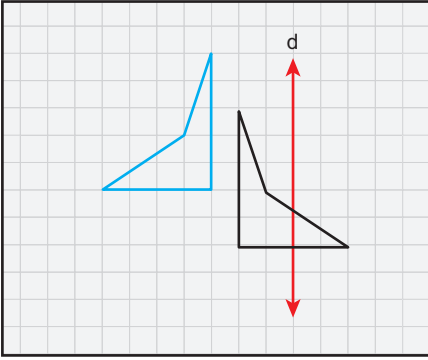
1. Aşağıdaki görselde geleneksel desenlerin kullanıldığı bir kilim örneği verilmiştir.



Görseli inceleyerek yansıma, öteleme ve dönme dönüşümleri uygulanan desenlere birer örnek bulunuz.



2.

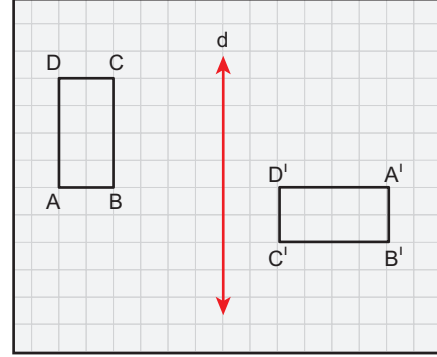


Yukarıda birim kareli zeminde verilen şekle art arda

- d doğrusuna göre yansıma dönüşümü
- 5 birim sola öteleme dönüşümü
- 2 birim yukarı öteleme dönüşümü

uygulanırsa en son elde edilen şekli bulunuz.

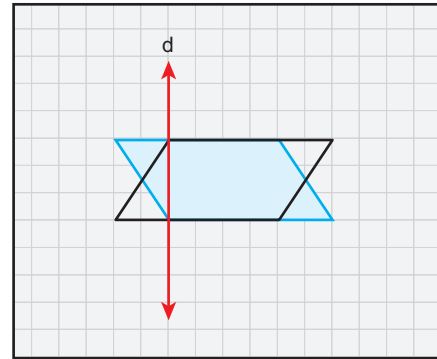
3. Aşağıdaki birimkareli zemindeki ABCD dikdörtgenine geometrik dönüşümler uygulanarak A'B'C'D' dikdörtgeni elde edilmiştir.



ABCD dikdörtgenine hangi geometrik dönüşümler uygulandığını bulunuz.

- A noktası etrafında saat yönünde 90° dönme dönüşümü
- d doğrusuna göre yansıma dönüşümü

4.



Yukarıda verilen paralelkenarın d doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsüne sağa doğru 4 birim öteleme dönüşümü uygulanırsa oluşan şekil ve ilk şeklin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

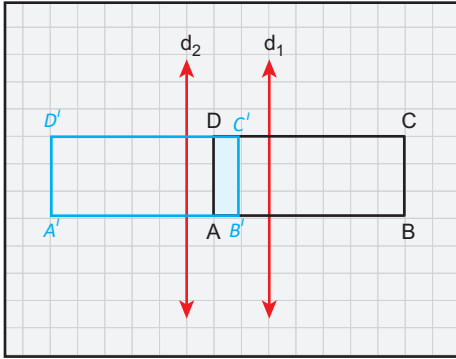
$$\text{Oluşan} = 4 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 1}{2} \cdot 2 = 15 \text{ birimkare}$$



Açık Uçlu Sorular Cevap Anahtarı

4. 15

1.



Birimkareli zeminde verilen ABCD dikdörtgeninin d_1 doğrusuna göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsüne d_2 doğrusuna göre yansıma dönüşümü uygulanırsa $A'B'C'D'$ dörtgeni elde ediliyor.

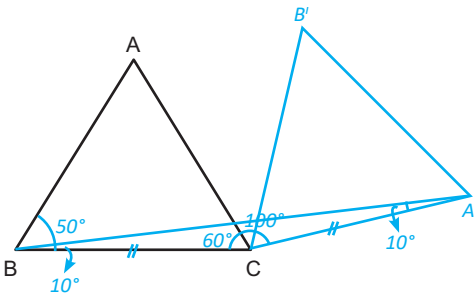
ABCD ile $A'B'C'D'$ dikdörtgenlerinin çakıştığı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

Alan = $3 \cdot 1 = 3$ birim kare

Cevap A

2.



Şekildeki ABC eşkenar üçgenine C köşesi etrafında saat yönünde 100° lik dönme dönüşümü uygulandığında $A'B'C$ üçgeni elde ediliyor.

Buna göre, $m(\widehat{ABA'})$ kaç derecedir?

- A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

BCA' üçgeni ikizkenar üçgendir

$$m(\widehat{BCA'}) = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ$$

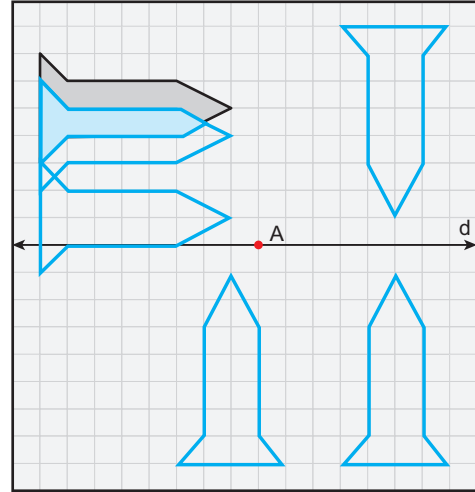
$$m(\widehat{CBA'}) = m(\widehat{CA'B}) = 10^\circ$$

$$m(\widehat{ABA'}) = 50^\circ$$

Cevap E

3. Şekilde birimkareli zemin üzerine çizilen roket A noktası etrafında saat yönünde 90° döndürüldükten sonra d doğrusuna göre yansıması alınıp 6 birim sola ötelenmiş ve roketin bir görüntüsü oluşmuştur.

Oluşan görüntü A noktası etrafında saat yönünde 90° döndürülmüş ve elde edilen görüntü 3 birim yukarı ötelenerek yeni bir görüntü elde edilmiştir.



Yapılan dönme ve öteleme dönüşümleri sonucunda elde edilen roket görüntüsü ile ilk başlangıçtaki roket görüntüsünün çakışan alanı kaç birimkaredir?

- A) 4 B) 5 C) 5,5 D) 6 E) 6,5

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 = 5,5 \text{ birimkare}$$

Cevap C



Cevap Anahtarı

1. A

2. E

3. C