



Tanıtım

Tema: Geometrik Şekiller

Konu: Üçgende Açı ve Kenarlarla İlgili Özellikler

Alt Konu: Üçgende Açı Kenar Bağlılıları

Temanın Amacı: Üçgende açı ve kenarlarla ilgili özellikleri kavrama, üçgenin açı ve kenarları arasındaki ilişkileri ispatlayabilme

Anahtar Kavramlar: Üçgen, açı, kenar, iç açı, dış açı, üçgen eşitsizliği



Köprü Kurma

1

Grafik tasarımında şekillerin ve kompozisyonların doğru ve dengeli olmasını sağlamak için üçgen eşitsizliğinden yararlanılır.

2

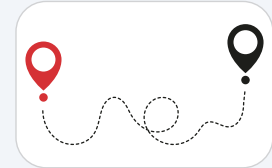
Kamera lensleri ve optik sistemler tasarlanırken, görüntü netliği ve odak mesafesi gibi faktörleri optimize etmek için üçgen eşitsizliği kullanılır.

3

Coğrafi konumlar arasındaki mesafe ölçümlerinde ya da rota belirlemede üçgen eşitsizliği kullanılır. Örneğin, bir yerden bir yere gitmenin en kısa yolunu bulurken üçgen eşitsizliğinden yararlanılır.

4

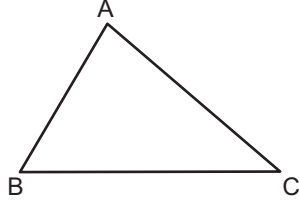
Harita yapımında kullanılan üçgenleme metodunda oluşturulan üçgenlerin geçerliliği üçgen eşitsizliği ile kontrol edilir.



Üçgende Açı - Kenar İlişkileri

Özellikler

- Bir üçgende büyük açının karşısında büyük kenar bulunur. Açılar arasındaki büyüklük sıralaması bu açıların karşısındaki kenarlar arasında da geçerlidir.



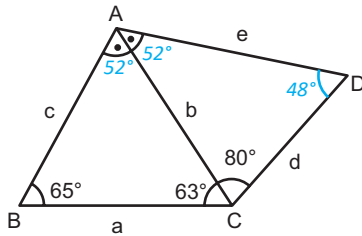
$$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) \Leftrightarrow a > b > c$$

Örnek 1

Aşağıda kenar uzunlukları veya açıları verilen üçgenlerin açılarını veya kenarlarını sıralayınız.

- $b > c > a$
- $a > b > c$
- $y > x > z$
- $x > z > y$

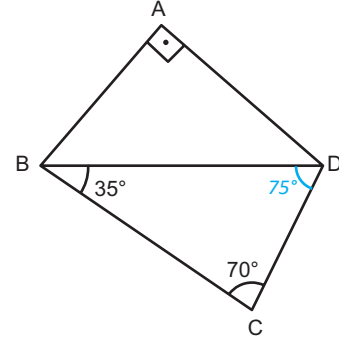
Örnek 2



ABC ve ACD üçgen, $m(\widehat{B}) = 65^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 63^\circ$
 $m(\widehat{ACD}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$ olduğuna göre, a, b, c, d ve e kenar uzunluklarının sıralamasını bulunuz.

\widehat{ABC} 'de $b > c > a$
 \widehat{ACD} 'de $e > d > b$ Buradan $e > d > b > c > a$

Örnek 3



ABCD dörtgen, $m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$, $m(\widehat{CBD}) = 35^\circ$, $m(\widehat{C}) = 70^\circ$ olduğuna göre, şekildeki en uzun kenar aşağıdakilerden hangisidir?

- A) [BD] B) [BC] C) [AD] D) [AB] E) [DC]

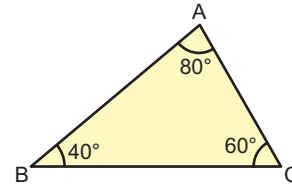
ABD üçgeninde 90° nin karşısı olan [BD] en uzun kenardır.

BCD üçgeninde $|BC| > |BD| > |DC|$ olduğundan en uzun kenar [BC] dir.

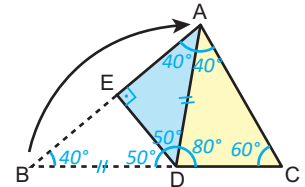
Cevap B

Çıkmış Soru 1

Ön yüzü sarı, arka yüzü mavi renkli olan üçgen biçimindeki ABC kâğıdı Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu kâğıt; B köşesi, A köşesinin üzerine gelecek biçimde Şekil 2'deki gibi katlanmıştır.



Şekil 1



Şekil 2

Buna göre; |AC|, |AE| ve |BD| uzunluklarının doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $|AC| < |AE| < |BD|$ B) $|AC| < |BD| < |AE|$
 C) $|AE| < |AC| < |BD|$ D) $|AE| < |BD| < |AC|$
 E) $|BD| < |AE| < |AC|$

(2019 TYT)

ADC üçgeninde

$$|AC| > |AD| = |BD| > |DC|$$

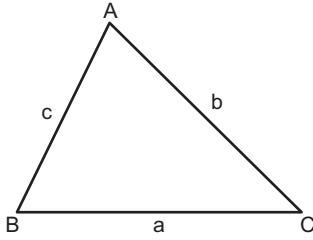
AED üçgeninde

$$|AD| = |BD| > |AE| \text{ Buradan } |AE| < |BD| < |AC|$$

Cevap D

2. Üçgen Eşitsizliği

Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamı ile farkının mutlak değeri arasında değer alır.



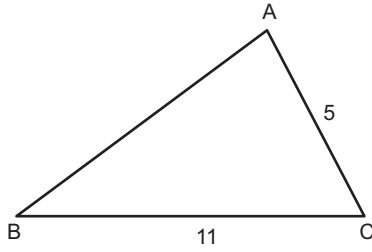
$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$



Örnek 4



ABC üçgen, $|AC| = 5$ birim, $|BC| = 11$ birim olduğuna göre, $|AB|$ 'nin en büyük ve en küçük tamsayı değerleri toplamı kaç birimdir?

- A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

$$11 - 5 < |AB| < 11 + 5$$

$$6 < |AB| < 16$$

En büyük 15 birim

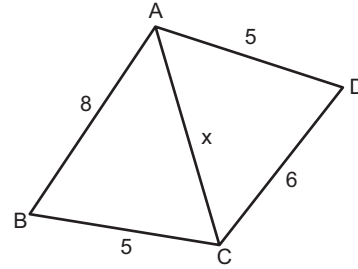
$$15 + 7 = 22 \text{ birim}$$

En küçük 7 birim

Cevap C



Örnek 5



ABCD dörtgen, $|AB| = 8$ cm, $|CD| = 6$ cm, $|AD| = |BC| = 5$ cm olduğuna göre, $|AC| = x$ in kaç tamsayı değeri vardır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

$$\widehat{ABC} \text{ 'ye göre } 8 - 5 < x < 8 + 5$$

$$3 < x < 13$$

$$\widehat{ACD} \text{ 'ye göre, } 6 - 5 < x < 6 + 5$$

$$1 < x < 11$$

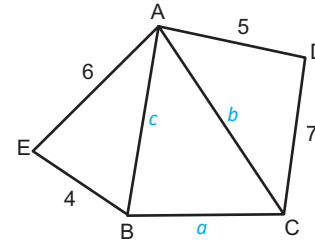
Buna göre, $3 < x < 11$

$x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 7 değer alır.

Cevap B



Örnek 6



$|AE| = 6$ birim, $|AD| = 5$ birim, $|EB| = 4$ birim, $|DC| = 7$ birim, ABC üçgeninin kenarları tam sayı olduğuna göre, çevresinin en büyük değeri kaç birimdir?

- A) 33 B) 35 C) 37 D) 39 E) 41

$$6 - 4 < c < 6 + 4$$

$$7 - 5 < b < 7 + 5$$

$$b - c < a < b + c$$

$$2 < c < 10$$

$$2 < b < 12$$

$$2 < a < 20$$

$$c = 9$$

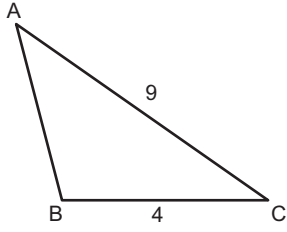
$$b = 11 \text{ birim}$$

$$a = 19 \text{ birim}$$

$$a + b + c = 39 \text{ birim}$$

Cevap D

Örnek 7



ABC üçgen, $|AC| = 9$ birim, $|BC| = 4$ birim ve $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olduğuna göre, $|AB|$ 'nin tam sayı değerleri toplamı kaç birimdir?

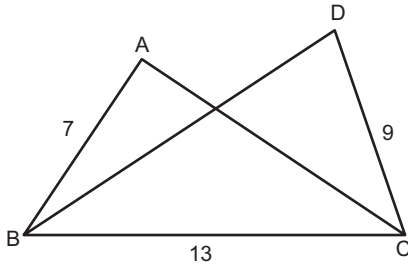
- A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

$$\begin{aligned} |AB| &< 9 \\ 9 - 4 &< |AB| < 9 + 4 \\ 5 &< |AB| < 13 \Rightarrow 5 < |AB| < 9 \\ |AB| &6, 7, 8 \text{ değerlerini alabilir.} \end{aligned}$$

Toplamları 21 birim

Cevap D

Örnek 8



ABC ve DBC üçgen, $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 13$ cm, $|DC| = 9$ cm olduğuna göre,

$|AC| + |BD|$ nin en büyük tam sayı değeri kaç birimdir?

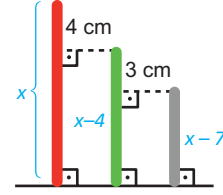
- A) 30 B) 36 C) 39 D) 41 E) 43

$$\begin{array}{r} 13 - 7 < |AC| < 13 + 7 & 13 - 9 < |BD| < 13 + 9 \\ 6 < |AC| < 20 & 4 < |BD| < 22 \\ + & \\ 10 < |AC| + |BD| < 42 \end{array}$$

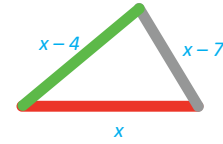
en çok 41 birim olur.

Cevap D

Örnek 9



Uzunlukları tam sayı olan üç çubuğun alt uçları zemine dik olarak tutulduğunda şekildeki uzunluklar elde edilmiştir.



Bu çubuklar uçları birbirine değecek biçimde birleştirilerek şekildeki üçgen oluşturulabildiğine göre kırmızı renkli çubuğun uzunluğu en az kaç cm olabilir?

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

$$\begin{aligned} (x-4) - (x-7) &< x < (x-4) + (x-7) \\ 3 &< x < 2x-11 \\ 11 &< x \text{ en az } 12 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

Cevap E

Örnek 10

Çevresi 24 cm olan çeşitkenar bir üçgenin herhangi bir kenar uzunluğunun en büyük tam sayı değeri kaçtır?

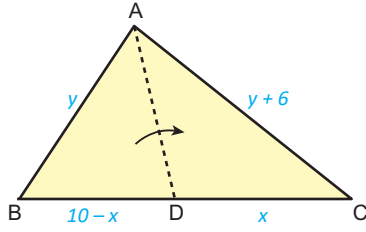
- A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 23

Üçgende bir kenar diğer iki kenarın toplamından küçüktür.

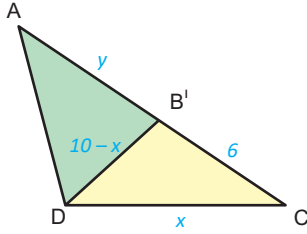
$$\begin{aligned} a &< b + c & a + b + c &= 24 \\ a &< 24 - a & b + c &= 24 - a \\ 2a &< 24 & & \\ a &< 12 & \text{En çok } 11 \text{ cm olabilir.} & \end{aligned}$$

Cevap B

Örnek 11



ABC üçgeninde ABD üçgeni AD boyunca katlandığında aşağıdaki gibi B köşesi AC kenarı üzerinde oluyor.



$|AC| = |AB| + 6$ ve $|BC| = 10$ birim

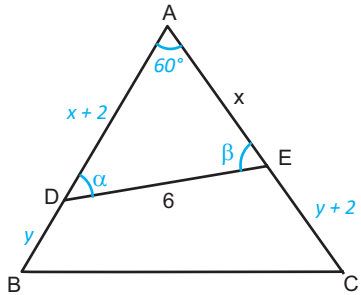
olduğuna göre, $|DC|$ 'nin en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

$$\begin{aligned} |10-x-x| < 6 < 10-x+x &\Rightarrow |10-2x| < 6 \\ -6 < 10-2x < 6 & \\ -16 < -2x < -4 & \\ 8 > x > 2 & \\ \text{Cevap} = 7 & \end{aligned}$$

Cevap C

Örnek 12



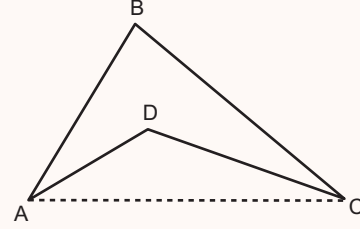
ABC eşkenar üçgen, $|DE| = 6$ birim ve $|EC| = |BD| + 2$ olduğuna göre, $|AE| = x$ kaç tam sayı değeri alabilir?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$$\begin{aligned} x+2-x < 6 < x+x+2 & \\ 2 < 6 < 2x+2 & \\ 4 < 2x & \\ 2 < x & \\ \beta > \alpha \text{ olduğundan} & \\ \alpha < 60^\circ \text{ olur.} & \\ x < 6 \text{ olur.} & \\ 2 < x < 6 & \\ 3, 4, 5 \text{ olabilir.} & \\ 3 \text{ değer alır.} & \end{aligned}$$

Cevap C

Not

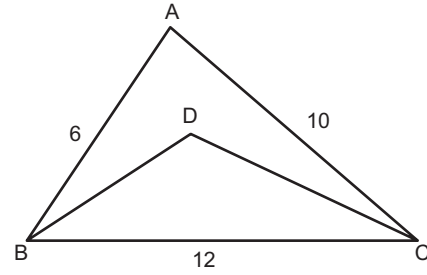


Şekilde A'dan C'ye en kısa yol $|AC|$ dir.

A'dan C'ye AD ve DC üzerinden gitmek, AB ve BC üzerinden gitmekten daha kısadır.

$|AB| + |BC| > |AD| + |DC| > |AC|$ olur.

Örnek 13



$|AB| = 6$ birim, $|AC| = 10$ birim, $|BC| = 12$ birim olduğuna göre, $|BD| + |DC|$ kaç tam sayı değeri alabilir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$$\begin{aligned} 12 < |BD| + |DC| < 6 + 10 & \\ 12 < |BD| + |DC| < 16 & \\ 13, 14, 15 \text{ olabilir.} & \\ 3 \text{ değer alır.} & \end{aligned}$$

Cevap B

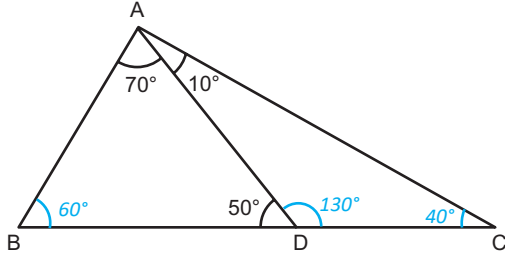
Örnek Cevap Anahtarı

1. a) $b > c > a$, b) $y > x > z$, c) $a > b > c$, d) $x > z > y$ 2. e) $d > b > c > a$ 3. B
4. C 5. B 6. D 7. D 8. D 9. E 10. B 11. C 12. C 13. B 14. A

Çıkmış Soru Cevap Anahtarı

1. D

1.



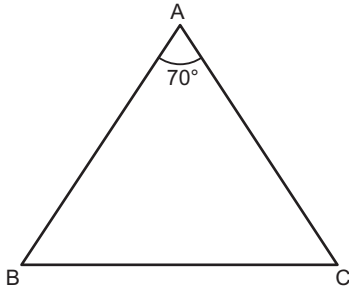
ABC üçgen, $m(\widehat{BAD}) = 70^\circ$, $m(\widehat{DAC}) = 10^\circ$,
 $m(\widehat{BDA}) = 50^\circ$ olduğuna göre, $|AD|$, $|BD|$ ve $|DC|$ yi
 sıralayınız.

$$\widehat{ABD} \text{ 'de } |BD| > |AD|$$

$$\widehat{ADC} \text{ 'de } |AD| > |DC|$$

$$|BD| > |AD| > |DC|$$

2.



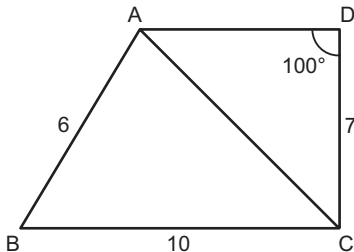
ABC üçgen, $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$ ve $|AB| > |AC|$ olduğuna
 göre, $m(\widehat{C})$ 'nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

$$|AB| > |AC| \Rightarrow m(\widehat{C}) > m(\widehat{B})$$

$$m(\widehat{C}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\Rightarrow m(\widehat{C}) > \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ \text{ En küçük } 56^\circ \text{ olur.}$$

3.

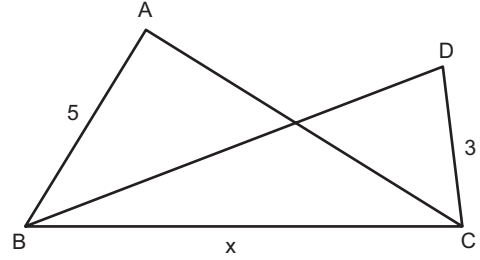


ABCD dörtgen, $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|DC| = 7$ cm
 $m(\widehat{D}) = 100^\circ$ olduğuna göre, $|AC|$ kaç tam sayı değeri
 alabilir?

$$10 - 6 < |AC| < 10 + 6 \quad |AC| > 7 \quad 8 \text{ tam sayı}$$

$$4 < |AC| < 16 \quad 7 < |AC| < 16 \text{ değeri alır.}$$

4.



ABC ve BDC üçgen, $|AB| = 5$ birim, $|DC| = 3$ birim,
 $|AC| = 8$ birim, $|BD| = 11$ birim olduğuna göre, $|BC| = x$
 kaç tam sayı değeri alabilir?

$$8 - 5 < x < 8 + 5$$

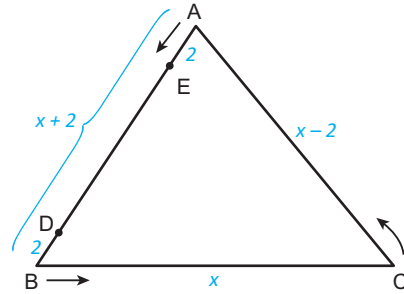
$$11 - 3 < x < 11 + 3$$

$$3 < x < 13$$

$$8 < x < 14$$

$$8 < x < 13 \rightarrow 4 \text{ değer alır.}$$

5.



ABC üçgenin üç köşesinden eşit hızlarla üç araç aynı anda
 oklar yönünde hareket edip belli bir süre gittiğinde A, B ve
 C'den hareket eden araçlar sırayla D, C ve E noktalarında
 olurlar.

$|AE| = |BD| = 2$ km olduğuna göre, ABC üçgenini çevre
 si tam sayı olarak en az kaç km dir?

$$(x + 2) - (x - 2) < x < x + 2 + x - 2$$

$$4 < x < 2x$$

$$\text{Çevre} = x + 2 + x - 2 + x$$

$$= 3x \Rightarrow 3x > 12$$

$$\text{En az } 13 \text{ km}$$



Açık Uçlu Sorular Cevap Anahtarı

1. $|BD| > |AD| > |DC|$

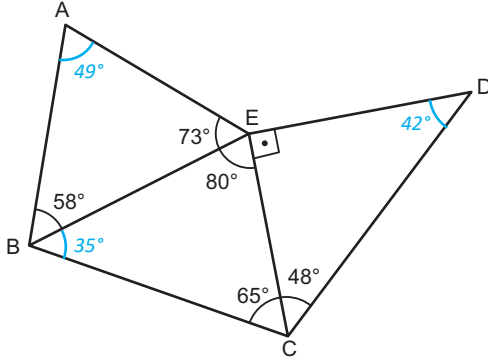
2. 56°

3. 8

4. 4

5. 13

1.



$m(\widehat{ABE}) = 58^\circ$, $m(\widehat{AEB}) = 73^\circ$, $m(\widehat{BEC}) = 80^\circ$,
 $m(\widehat{CED}) = 90^\circ$, $m(\widehat{ECD}) = 48^\circ$ ve $m(\widehat{ECB}) = 65^\circ$

olduğuna göre, şekildedeki en kısa kenar aşağıdakilerden hangisidir?

- A) |AE| B) |BE| C) |EC| D) |ED| E) |AB|

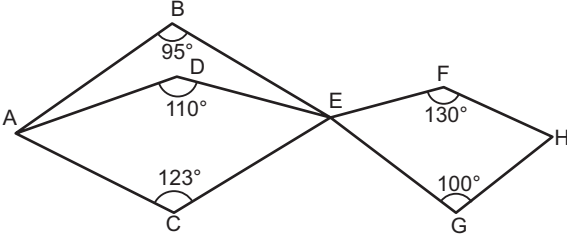
\widehat{ABE} 'de en kısa kenar |BE|

\widehat{BEC} 'de en kısa kenar |EC|

\widehat{DEC} 'de en kısa kenar |EC| Cevap |EC|

Cevap C

2.



Şekildedeki çizgiler A ile H noktaları arasındaki doğrusal yolları göstermektedir.

Buna göre, A noktasından H noktasına gidiş için en kısa güzergah aşağıdakilerden hangisidir?

- A) A – C – E – G – H B) A – B – E – G – H
 C) A – D – E – F – H D) A – C – E – F – H
 E) A – D – E – G – H

A'dan E'ye gidiş için A – C – E en kısa yol ($123^\circ > 110^\circ > 95^\circ$)

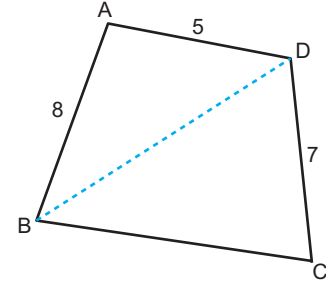
E'den H'ye gidip için

E – F – H en kısa yol ($130^\circ > 100^\circ$)

A – C – E – F – H

Cevap D

3.



|AB| = 8 birim, |AD| = 5 birim, |DC| = 7 birim olduğuna göre, |BC|'nin en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

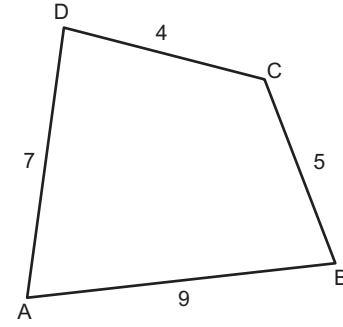
$$8 - 5 < |BD| < 8 + 5 \quad ||BD| - 7| < |BC| < |BD| + 7 \\ 3 < |BD| < 13 \quad \underbrace{13 + 7}$$

$$|BC| < 20$$

En çok 19 birim

Cevap C

4.



|AD| = 7 birim, |AB| = 9 birim, |BC| = 5 birim, |DC| = 4 birim olduğuna göre, |AC| + |BD| nin en küçük ve en büyük tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

- A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

$$3 < |AC| < 11$$

$$1 < |BD| < 9$$

$$4 < |AC| < 14$$

$$2 < |BD| < 16$$

$$4 < |AC| < 11$$

$$2 < |BD| < 9$$

$$+ \quad 2 < |BD| < 9$$

$$6 < |AC| + |BD| < 20$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{En az} = 7 \\ \text{En çok} = 19 \end{array} \right\} 19 + 7 = 26$$

Cevap E



Cevap Anahtarı

1. C

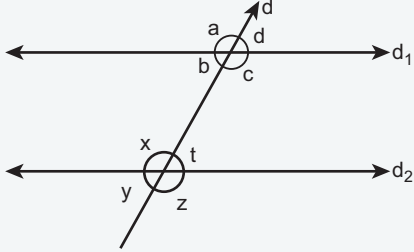
2. D

3. C

4. E

TEMA ÖZETİ

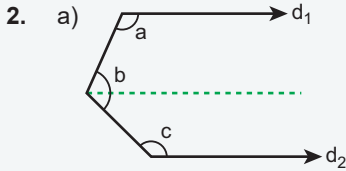
1. Paralel doğrularla ilgili özellikler



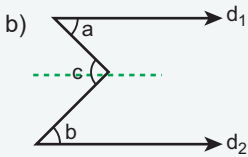
Yukarıdaki şekilde d_1 ve d_2 doğruları birbirine paraleldir. ($d_1 \parallel d_2$)

d doğrusunun d_1 ve d_2 doğruları ile oluşturduğu açılara göre,

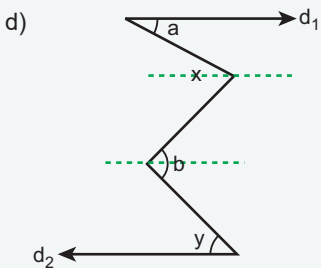
- 1) Yöndeş açı eşitliğinden $a = x$, $d = t$, $c = z$, $b = y$ olur.
- 2) İç ters açı eşitliğinden $b = t$ ve $c = x$ olur.
- 3) Dış ters açı eşitliğinden $d = y$ ve $a = z$ olur.
- 4) Karşı durumlu açı özelliğinden $c + t = 180^\circ$ ve $b + x = 180^\circ$ olur.
- 5) Ters açı eşitliğinden $b = d$, $a = c$, $y = t$, $x = z$ olur.



$d_1 \parallel d_2$
 $a + b + c = 360^\circ$

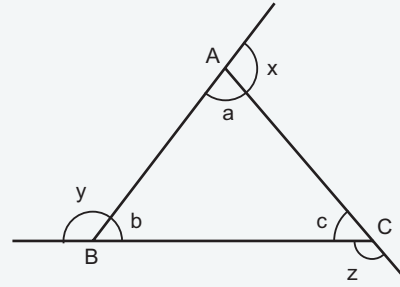


$d_1 \parallel d_2$
 $a + b = c$



$d_1 \parallel d_2$
 $a + b = x + y$

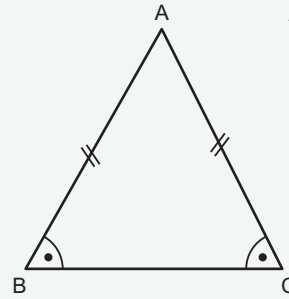
3.



ABC üçgeninde a, b, c iç açılar ve x, y, z dış açılardır.

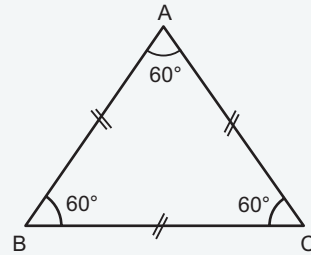
- $a + b + c = 180^\circ$
- $x + y + z = 360^\circ$
- $a + b = z$, $a + c = y$, $b + c = x$

4.



ABC ikizkenar üçgen
 $|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\hat{B}) = m(\hat{C})$

5.



ABC eşkenar üçgen

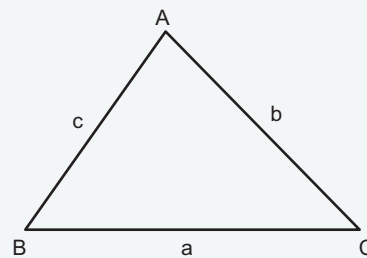
$|AB| = |AC| = |BC|$ ve $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^\circ$

6.

Bir üçgende büyük açının karşısında büyük kenar bulunur.

$m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C}) \Leftrightarrow a > b > c$ olur.

7.



Üçgen eşitsizliği

$|b - c| < a < b + c$ $|a - b| < c < a + b$
 $|a - c| < b < a + c$