



Tanıtım

Tema: Nicelikler ve Değişimler

Konu: Mutlak Değer Fonksiyonu

Alt Konu: Mutlak Değer Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

Temanın Amacı: Gerçek sayılarla $f(x) = \pm |ax \pm b| \pm c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$) şeklinde tanımlı mutlak değer fonksiyonlarının nitel özelliklerini incelemek için doğrusal fonksiyonlara bağlı analogik akıl yürütebilme

Anahtar Kavramlar: Mutlak değer fonksiyonu, kök, katsayı, maksimum ve minimum noktaları

Köprü Kurma

Mutlak değer fonksiyonları günlük hayatta ve fen bilimlerinde çeşitli alanlarda önemli uygulamalara sahiptir.

Günlük Hayatta Mutlak Değer Fonksiyonları:

- 1. **Mesafe Hesaplamaları:** Mutlak değer bir noktadan diğere olan uzaklığı hesaplamak için kullanılır. Örneğin; bir kişinin evinden okula olan mesafesi a ise hangi yöne gittiğine bakılmaksızın pozitif bir değerdir. Matematiksel olarak, bu mesafe $|a|$ şeklinde ifade edilir.
- 2. **Sıcaklık Farkları:** İki farklı günün sıcaklık farkını hesaplamak için mutlak değer kullanılır. Örneğin; bir gün 5°C , diğer gün -3°C ise sıcaklık farkı 8°C olarak hesaplanır çünkü farkın işareti önemli değildir.
- 3. **Finansal İşlemler:** Mutlak değer kazanç ve kayıp hesaplamalarında kullanılır. Örneğin; bir yatırımın karı veya zararı, mutlak değer kullanılarak pozitif bir miktar olarak ifade edilebilir. Eğer bir hisse senedi fiyatı a dan b ye değişirse, kâr veya zarar $|a-b|$ ile belirlenir.

Fen Bilimlerinde Mutlak Değer Fonksiyonları:

- 1. **Fizikte Hız ve Hızlanma:** Mutlak değer hız ve hızlanma hesaplamalarında önemli bir rol oynar. Örneğin bir nesnenin hızının değeri (negatif veya pozitif yön fark etmeksizin) mutlak değer olarak ifade edilir. Hız $|v|$ ve hızlanma (ivme) $|a|$ kullanılarak daha anlaşılır hale gelir.

- 2. **Kimyada pH Değerleri:** Kimyada bir çözeltinin asidik veya bazik olduğunu belirlemek için pH değerleri kullanılır. Ancak bu değerlerin mutlak değeri çözeltinin ne kadar asidik veya bazik olduğunu anlamamıza yardımcı olur.
- 3. **Jeolojide Deprem Büyüklüğü:** Depremlerin büyüklüğü genellikle Richter ölçeği ile ölçülür ve bu ölçek üstel fonksiyon tarzında bir yapıya sahiptir. Deprem büyüklüğü hesaplamaları, sismik dalgaların genliğinin mutlak değerine dayanır bu da depremin enerjisini anlamamıza yardımcı olur.

Mühendislik:

- 1. **Stres Analizi:** Mühendislikte malzeme stres analizinde, stresin mutlak değeri alınarak malzemenin maruz kaldığı kuvvetin büyüklüğü hesaplanır. Bu malzemenin kırılma veya deformasyon riskini belirlemede yardımcı olur.
- 2. **Sinyal İşleme:** Elektrik mühendisliğinde bir sinyalin genliği genellikle mutlak değer fonksiyonlarıyla hesaplanır. Bu sinyalin pozitif veya negatif olmasından bağımsız olarak, büyüklüğünü belirler.

Mutlak değer fonksiyonları matematiksel bir araç olmanın ötesinde farklı disiplinlerdeki problemleri çözmede de önemli bir rol oynar. Bu fonksiyonların kullanımı gerçek dünyadaki olguları daha doğru ve net bir şekilde modellememizi sağlar.

Mutlak Değer

Tanım

Bir gerçel sayının sayı doğrusundaki yerinin başlangıç noktasına (sıfıra) olan uzaklığına o sayının mutlak değeri denir ve $|x|$ ile gösterilir

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Not

Mutlak değer içindeki ifade 0' dan küçükse mutlak değer dışına -1 ile çarpılarak çıkarılır.

Örneğin; $|-9| = -(-9) = 9$

Örnek 1

$1 < a < 2$ olmak üzere

$$|3a| + |a - 1| + |a - 3|$$

ifadesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a + 3$ B) $2a - 3$ C) $3a$
D) $3a + 2$ E) $4a + 1$

$$\begin{aligned} |3a| + |a - 1| + |a - 3| &= 3a + a - 1 + (-a + 3) \\ &= 3a + a - 1 - a + 3 = 3a + 2 \end{aligned} \quad \text{Cevap D}$$

Örnek 2

$a < 0 < b$ olmak üzere

$$|a - b| + |a - 1| + |-5a|$$

ifadesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3a + b - 1$ B) $b - 5a + 1$ C) $-5a + b - 1$
D) $-3a + b + a$ E) $-7a + b + 1$

$$\begin{aligned} |a - b| + |a - 1| + |-5a| &= -(a - b) + (-(a - 1)) + (-5a) \\ &= -a + b - a + 1 - 5a \\ &= -7a + b + 1 \end{aligned} \quad \text{Cevap E}$$

Önemli

• $|x| \geq 0$

Bir gerçel sayının mutlak değeri 0' a eşit ya da 0 dan büyüktür.

• $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Çarpım durumundaki iki gerçel sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerlerinin çarpımına eşittir.

• $y \neq 0$ olmak üzere

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

Bölüm durumundaki iki gerçel sayının mutlak değeri bu sayının mutlak değerlerinin bölümüne eşittir.

• $|x| = |-x|$

Toplamaya göre zıt işaretli iki gerçel sayının mutlak değeri birbirine eşittir.

• $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$|x^n| = |x|^n \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

Bir gerçel sayının pozitif tam sayı kuvvetlerinin mutlak değeri mutlak değerinin aynı kuvvetlerine eşittir.

• $|x + y| \leq |x| + |y|$

İki gerçel sayının toplamının mutlak değeri sayıların ayrı ayrı mutlak değerlerinin toplamından küçük veya eşittir.

Örnek 3

$$|x| = 9$$

olduğuna göre x' in alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

- A) -3 B) -6 C) -9 D) -18 E) -81

$$\begin{aligned} |x| &= 9 \\ x &= 9 \quad 9 \cdot (-9) = -81 \text{ bulunur} \end{aligned} \quad \text{Cevap E}$$

Örnek 4

$$|\sqrt{7} - 3| + |\sqrt{7} + 3|$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 0

$$|\sqrt{7} - 3| + |\sqrt{7} + 3| = 3 - \sqrt{7} + \sqrt{7} + 3 = 6 \quad \text{Cevap B}$$

Örnek 5

$a > 0 > b$ olmak üzere,

$$|a - b| + |b - a| + |3b - a|$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $3a - 5b$ B) $2a + 3b$ C) $a + 5b$
D) $a - 4b$ E) $3a - 7b$

$$|a - b| + |b - a| + |3b - a| = a - b - b + a - 3b + a = 3a - 5b \text{ bulunur}$$

Cevap A

Örnek 6

$x = 2 - \sqrt{5}$ $y = |x| + 2$ $z = |y - \sqrt{5}| + 4$
olduğuna göre z kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

$$y = |2 - \sqrt{5}| + 2 = \sqrt{5} - 2 + 2 = \sqrt{5} \text{ olur}$$

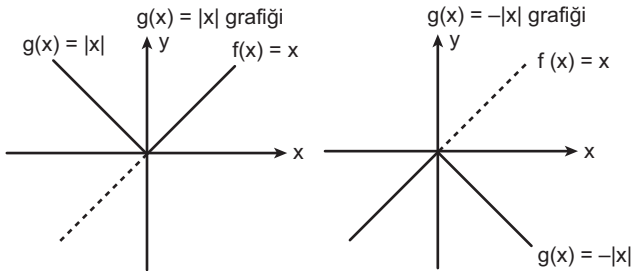
$$z = |\sqrt{5} - \sqrt{5}| + 4 = 4 \text{ bulunur}$$

Cevap B

 $g(x) = \mp |x|$ Biçimindeki Mutlak Değer Fonksiyonu

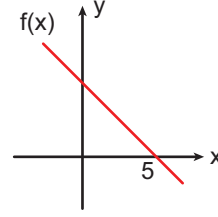
$g(x) = |x|$ ve $g(x) = -|x|$ grafiği için tablo oluşturalım.

x	-	-2	-1	0	1	10	∞
$ x $	∞	2	1	0	1	10	∞
$- x $	$-\infty$	-2	-1	0	-1	-10	$-\infty$

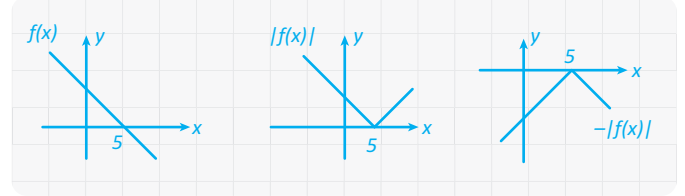


Buradan $y = f(x) = x$ grafiğinden $g(x) = |x|$ grafiğini oluştururken $f(x)$ grafiğinin x ekseninin altında kalan kısımları simetrik şekilde yukarı taşınır. $g(x) = -|x|$ grafiği çizilirken $f(x) = x$ grafiğinin x ekseninin yukarısında kalan kısımları simetrik olarak x ekseninin alt kısmına taşınır.

Örnek 7



Şekilde verilen $f(x)$ fonksiyonuna göre $|f(x)|$ ve $-|f(x)|$ grafiklerini çiziniz.



Örnek 8

Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

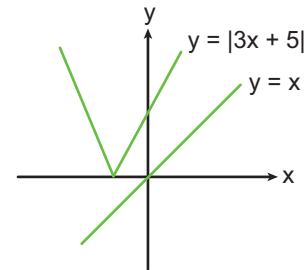
Fonksiyonun Nitel Özellikleri	$f(x) = x$	$g(x) = - x $
Görüntü Kümesi	R	R^-
Fonksiyonun Sıfırı	0	0
Birebir fonksiyon mu?	Evet	Hayır
Daima artan fonksiyon mu?	Evet	Hayır
Daima azalan fonksiyon mu?	Hayır	Hayır
En geniş tanım kümesi	R	R

 $g(x) = \pm |ax + b|$ Biçimindeki Mutlak Değer Fonksiyonu

$g(x) = |ax + b|$ ve $g(x) = -|ax + b|$ grafiği için tablo oluşturalım.

x	$-\infty \dots$	-2	-1	0	1	5	\dots	10	$\dots \infty$
$ 3x + 5 $	$-\infty \dots$	1	2	5	8	20	\dots	35	$\dots \infty$
$- 3x + 5 $	$-\infty \dots$	-1	-2	-5	-8	-20	\dots	-35	$\dots -\infty$

$g(x) = |3x + 5|$ fonksiyonunun grafiği;

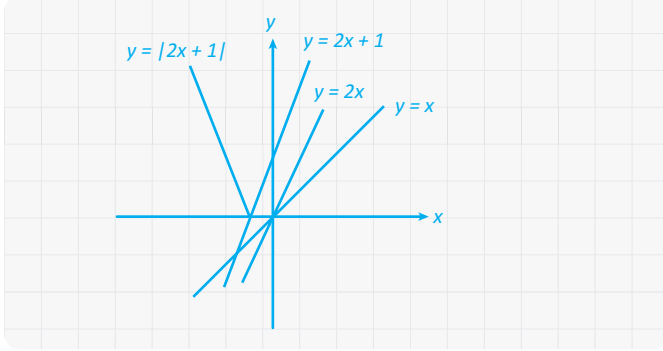


şekindedir.



Örnek 9

$f(x) = x$ fonksiyonundan yararlanarak $g(x) = |2x + 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek 10

$f(x) = |3x + 6|$ fonksiyonunun sıfırını bulunuz.

$$|3x + 6| = 0$$

$$3x + 6 = 0$$

$$x = -2$$

$f(x)$ fonksiyonunun sıfırındır.



Örnek 11

$f(x) = |x + 3|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

$$A) f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq -3 \\ -3 - x, & x \leq -3 \end{cases} \quad B) f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq -3 \\ 3 + x, & x \leq -3 \end{cases}$$

$$C) f(x) = \begin{cases} -x - 3, & x \geq 3 \\ -x + 3, & x \leq 3 \end{cases} \quad D) f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq 3 \\ 2x + 3, & x < 3 \end{cases}$$

$$E) f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \geq 4 \\ -x + 3, & x \leq 5 \end{cases}$$

$$x + 3 = 0 \quad x = -3$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \geq -3 \\ -3 - x, & x \leq -3 \end{cases} \text{ olur.}$$

Cevap A



Örnek 12

Aşağıdaki bir kuruyemiş dükkanının günlük cirosunun takip tablosu verilmiştir.

- Günlük ortalama ciro 5000 TL dir.
- Hesaplanan günlük cironun günlük ortalama cirodan farklılık miktarı en fazla 4000 TL dir.
- Haziran ayında farklı günlerde cirolar hesaplanmış ve aşağıdaki tablo yapılmıştır.

Günler	Hesaplanan Ciro	Hesaplanan Ciro ile Ortalama Ciro Farkının Mutlak Değeri	Farklılık
1	7.500	7.500 - 4.000	3.500
2	6.800	6.800 - 4.000	2.800
3	6.200	6.200 - 4.000	2.200
4	5.500	5.500 - 4.000	1.500
5	4.800	4.800 - 4.000	800
6	4.000	4.000 - 4.000	0
7	3.000	3.000 - 4.000	1.000
8	2.000	2.000 - 4.000	2.000
9	1.000	1.000 - 4.000	3.000
10	500	500 - 4.000	3.500

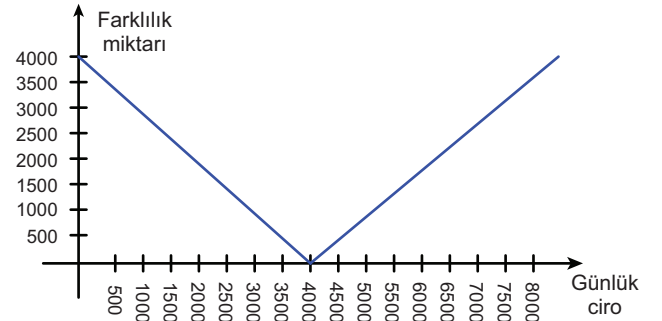
Verilenlere göre,

- a) Hesaplanan ciroya bağlı farklılık miktarının değişimini veren fonksiyon h olsun. h fonksiyonunu parçalı fonksiyon biçiminde ifade ediniz.

Hesaplanan ciro $[500, 1000]$ aralığındadır.

$$h(x) = \begin{cases} x - 4.000, & x \geq 4.000 \\ 4.000 - x, & x < 4.000 \end{cases} \text{ biçimindedir.}$$

- b) Cebirsel gösterimden yararlanılarak $h(x)$ fonksiyonunu çiziniz.

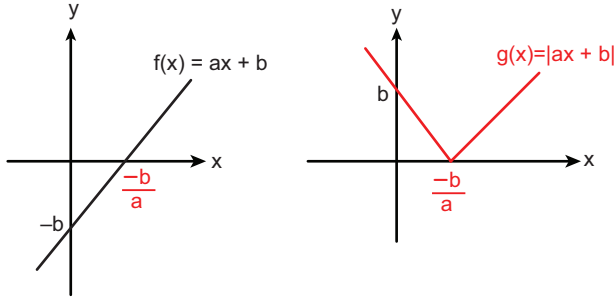


- c) Günlük ciro ile ortalama ciro birbirine eşit olduğunda h fonksiyonunun hangi nitel özelliği gerçekleşir?

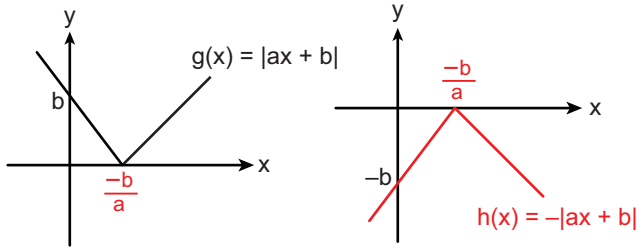
$|4.000 - 4.000| = 0$ olması demektir. Bu $h(x)$ fonksiyonunun sıfırını bulmaktadır.

$g(x) = \pm ax + b \pm c$ Biçimindeki Mutlak Değer Fonksiyonu

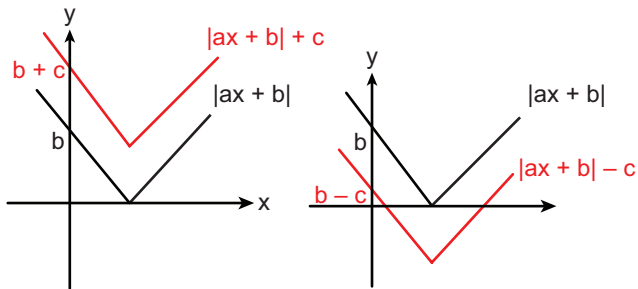
Gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = |ax + b|$ fonksiyonunun grafikleri gerçel sayılarda tanımlı $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak çizilir.



$h(x) = -|ax + b|$ fonksiyonunun grafiği $g(x) = |ax + b|$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak çizilir.

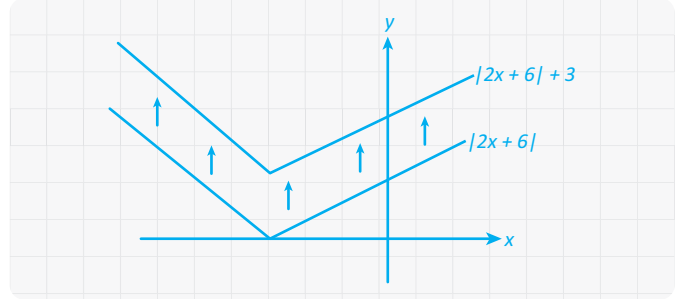


Gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = |ax + b| \pm c$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri, gerçel sayılarda tanımlı $|ax + b|$ fonksiyonunun grafiğinin c birim yukarı ya da aşağı ötelenmesi ile çizilir.



Örnek 13

$f(x) = |2x + 6| + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Örnek 14

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 2x - 1$ ve $g(x) = |f(x)| - 4$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

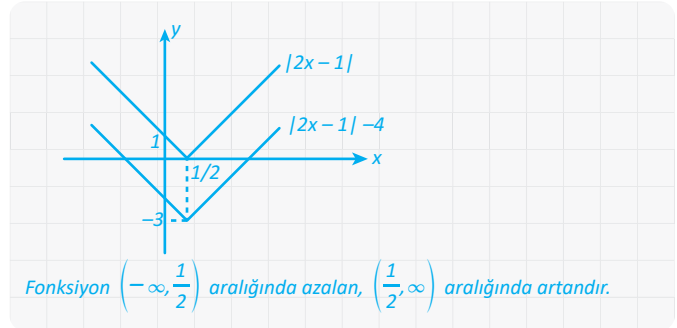
a) $g(x)$ fonksiyonunun değer kümesini bulunuz.

$g(x) = |f(x)| - 4$ Değer kümesi $[-4, \infty)$ aralığını kapsayacak biçimde olmalıdır.

b) $g(x)$ fonksiyonunun sıfırını bulunuz.

$g(x) = |2x - 1| - 4 = 0$ $2x - 1 = 4, 2x - 1 = -4$
 $|2x - 1| = 4$ $2x = 5, 2x = -3$
 $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{3}{2}$
 fonksiyonların sıfırlarıdır.

c) Grafiğini çizerek artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.



Örnek Cevap Anahtarı

1.D 2.E 3.E 4.B 5.A 6.B 10.-2 11.A

12. c) 4000 14.a) $[-4, \infty)$, b) $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{3}{2}$ c) $(-\frac{1}{2}, \infty), (\frac{1}{2}, \infty)$

Etkinlik

Etkinlik İsmi : Harçlık Fonksiyonu

Amacı : Fonksiyonları Gündelik Hayat ile İlişkilendirme

Ceylin ve Ceren kardeşler Ramazan Bayramında akrabalarını gezerek bayramlaşmaktadır. Arefe gününde babaları Ali Bey Ceylin'e a TL, Ceren'e b TL harçlık vermiştir.

Ceylin ve Ceren'in bayramda topladıkları harçlıklar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Ceylin	Topladığı bayram harçlığı
1. gün	Babamdan aldığı harçlığın 2 katı kadar.
2. gün	1. gün topladığım paranın 2 katınının 20 eksiğinin sıfır sayısına uzaklığı kadar.
3. gün	2. gün topladığı paranın 100 TL fazlası

Ceren	Topladığı bayram harçlığı
1. gün	Babasından aldığı harçlığın 3 katı kadar
2. gün	1. gün topladığı paraya eşit
3. gün	2. gün topladığı paranın sıfıra uzaklığınının 500 TL fazlası

Ceylin'e babasının verdiği harçlık (0,100) TL, Ceren'e babasının verdiği harçlık (0,150) TL aralığındadır.

Buna göre,

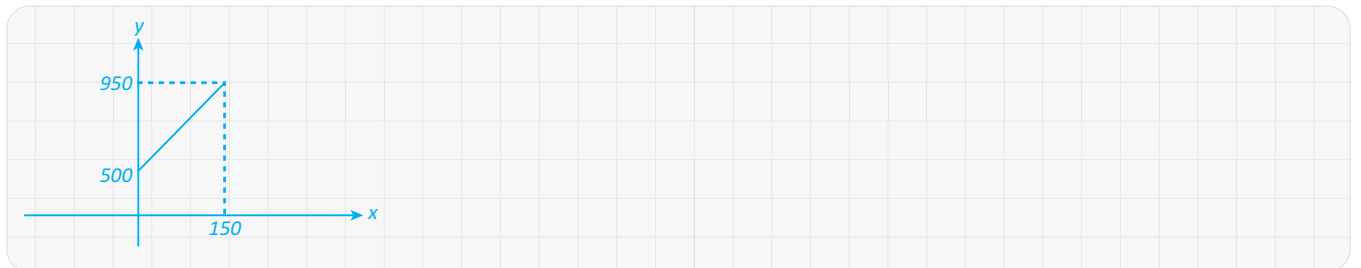
a) Ceylin ve Ceren'in babalarından aldıkları harçlığa bağlı 1., 2. ve 3. günler için topladıkları para miktarını veren fonksiyonları yazınız.

Ceylin		Ceren			
1. gün	$f: (0, 100) \rightarrow (0, 200)$	$f(a) = 2a$	1. gün	$m: (0, 150) \rightarrow (0, 450)$	$m(b) = 3b$
2. gün	$g: (0, 100) \rightarrow (0, 380)$	$g(a) = 4a - 20 $	2. gün	$n: (0, 150) \rightarrow (0, 450)$	$n(b) = 3b$
3. gün	$h: (0, 100) \rightarrow (0, 480)$	$h(a) = 4a - 20 + 100$	3. gün	$k: (0, 150) \rightarrow (0, 950)$	$k(b) = 3b + 500$

b) Ceylin'in 2. gün para fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



c) Ceren'in 3. gün para fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



1. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $2 < a < 3$ olmak üzere $|4a| + |a - 2| + |3 - a|$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

$$|4a| + |a - 2| + |3 - a| = 4a + a - 2 + 3 - a = 4a + 1$$

b) $m < 0 < n$ olmak üzere,

$|m - n| + |n - m| + |4m| + |3n|$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz

$$= n - m + n - m - 4m + 3n = 5n - 6m$$

2. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $|2x - 7| = 5$ olduğuna göre x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{l} |2x - 7| = 5 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2x - 7 = 5 \quad 2x - 7 = -5 \\ x = 6 \quad \quad x = 1 \\ \text{Değerler toplamı 7 olur.} \end{array}$$

2. yol

Hatırlatma:

$|ax + b| = c$ ifadesini sağlayan x ler toplamı

$ax + b = 0$ ise $x = -\frac{b}{a}$ nin 2 katıdır.

$$|2x - 7| = 5$$

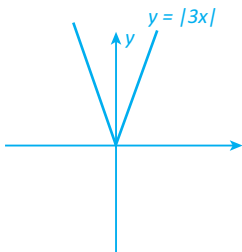
$$2x - 7 = 0 \quad x = \frac{7}{2}$$

Sonuç $2 \cdot \frac{7}{2} = 7$ bulunur.

b) $|3x - 7| = -2$ olduğuna göre x in alabileceği değerlerin kümesini yazınız.

Mutlak değerden negatif sonuç çıkamaz x in alabileceği değer kümesi \emptyset dir.

3. $f(x) = |3x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz, sıfırını ve artan azalan olduğu aralıkları bulunuz.

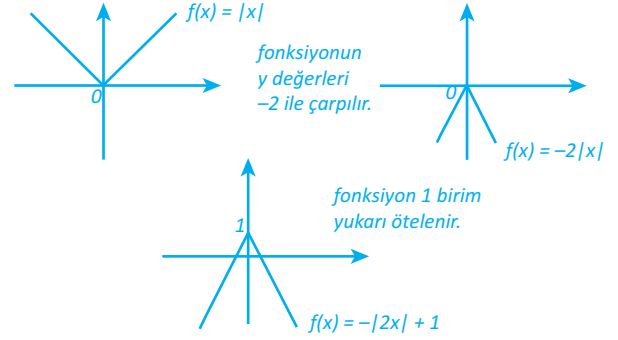


Sıfırını $x = 0$ dir.

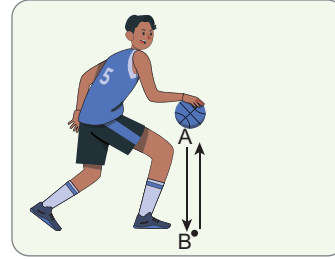
$(-\infty, 0)$ azalan

$(0, \infty)$ artandır.

4. $f(x) = |x|$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $g(x) = -2|x| + 1$ fonksiyonunu grafiğini çiziniz.



5.



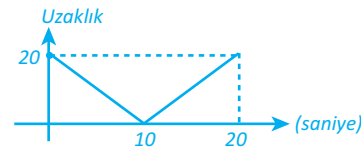
Şekildeki kişi elindeki topu sabit hızla B noktasına değdirip aynı sabit hızla tekrar A noktasına getirmiştir.

Buna göre;

a) A noktasındaki topun B noktasına yaklaşması ve uzaklaşması bir grafik ile gösterilirse grafik doğrusal fonksiyon grafiği midir?

Evet. Doğrusal fonksiyon grafiğidir.

b) A noktasının B noktasına topun seyrettiği yoldaki uzaklığı 20 metre topun sabit hızı saniyede 2 metre ise oluşacak grafiği çiziniz.



c) Oluşan grafiğe bakarak parçalı fonksiyon yazınız.

$$f(x) = \begin{cases} 20 - 2x, & 0 < x < 10 \\ 2x - 20, & 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

d) Bu parçalı fonksiyonu mutlak değer fonksiyonu ile ifade ediniz.

$$f(x) = |2x - 20| \text{ dir.}$$



Açık Uçlu Sorular Cevap Anahtarı

1.a) $4a + 1$, b) $5n - 6m$ 2. a) 7, b) \emptyset 3. $(0, \infty)$

5.a) Evet. b) c) $f(x) = \begin{cases} 20 - 2x, & 0 < x < 10 \\ 2x - 20, & 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$

d) $f(x) = |2x - 20|$

1. $||x| - 3| - 5|$

ifadesinin değeri $x = -2$ için kaçtır?

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

$|x| = |-2| = 2$

$|2 - 3| = 1$

$|1 - 5| = 4$ bulunur.

Cevap B

2. $x > 0$ olmak üzere,

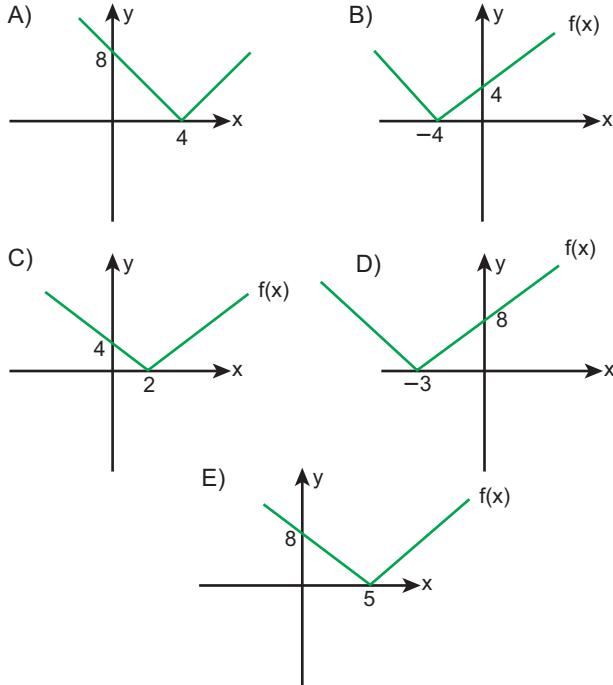
$$\frac{|3x|}{x} + \frac{|2x - 6|}{|x - 3|} + 2$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

$$= \frac{3|x|}{x} + \frac{2|x - 3|}{|x - 3|} + 2 = 3 + 2 + 2 = 7 \text{ olur.}$$

Cevap D

3. $f(x) = |2x - 8|$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

$|2x - 8| = 0$

 $x = 4$ için sıfır noktası $x = 0$ için fonksiyon $(0, 8)$ den geçiyor.

Cevap : A

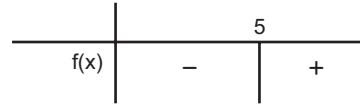
4. $f(x) = |10x - 100|$ fonksiyonu $[0, 10]$ aralığında tanımlıdır. $g(x) = f(x) + 100$ fonksiyonunun alabileceği en büyük değer alabileceği en küçük değerden kaç fazladır?

- A) 200 B) 160 C) 140 D) 120 E) 100

 $|10x - 100|$ en büyük değerini $x = 0$ da alır 100 olur. $|10x - 100|$ en küçük değerini $x = 10$ de alır ve 0 olur. $g(x) = 100 + 100 = 200$ en büyük değer $g(x) = 0 + 100 = 100$ en küçük değerdir. $200 - 100 = 100$ fazladır.

Cevap E

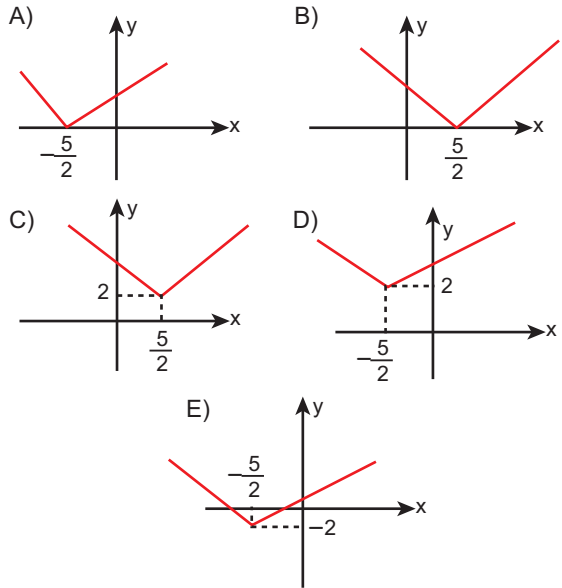
5.

Yukarıda işaret tablosu verilen, bağımsız değişkeninin katsayısı değeri 3 olan, doğrusal fonksiyon için $|f(x)| + 4$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

- A)
- $|x - 5|$
- B)
- $|x + 5|$
- C)
- $|3x - 5| + 4$
-
- D)
- $3|x - 5| + 4$
- E)
- $|x + 5| + 4$

 $f(x) = 3(x - 5)$ dir. $|f(x)| + 4 = 3|x - 5| + 4$ olur.

Cevap D

6. $f(x) = |2x + 5| - 2$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?Grafik $|2x + 5| - 2 = 0$ için $x = -\frac{5}{2}$ den ve y ekseninde -2 den geçmelidir.

Cevap E



Cevap Anahtarı

1. B 2. D 3. A 4. E 5. D 6. E