Tanıtım

Tema: Nicelikler ve Değişimler

Konu: Doğrusal ve Parçalı Fonksiyon

Alt Konu: Sayılarda Tanımlı Doğrusal Fonksiyonların Öteleme Dönüşümü ve Parçalı Fonksiyonlar

Temanın Amacı: Gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonunun nitel özellikleri ile bu fonksiyonlardan türetilen $g(x) = a \cdot f(x \mp r) \mp k$ doğrusal fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme

Köprü Kurma

Doğrusal fonksiyonlarda öteleme bir fonksiyonun grafiğinin belirli bir miktar sağa, sola, yukarı veya aşağı kaydırılması anlamına gelir. Bu kavram, gündelik hayat ve fen bilimlerinde çeşitli problemlerin çözümünde uygulanabilir. İşte bazı örnekler:

Gündelik Hayatta Doğrusal Fonksiyonlarda Öteleme

1. **Trafik Işıkları ve Zamanlama:**
   - Trafik ışıklarının zamanlaması, doğrusal fonksiyonlarla modellenebilir. Örneğin, bir trafik ışığının yeşil, sarı ve kırmızı yanma sürelerini belirli aralıklarla kaydırarak trafik akışını optimize edebiliriz.

2. **Ev Ekonomisi ve Bütçeleme:**
   - Aylık harcamalar ve gelirler doğrusal fonksiyonlarla modellenebilir.
   Örneğin, belirli bir masraf kaleminde artış (öteleme) olması durumunda, bütçe planında bu değişiklik göz önünde bulundurulabilir.

Fen Bilimlerinde Doğrusal Fonksiyonlarda Öteleme

1. **Fizik - Hareket Problemleri:**
   - Bir cismin doğrusal hareketi, zaman fonksiyonu olarak konum grafiği ile modellenebilir. Eğer cisim başlangıç noktasından farklı bir konumda harekete başlarsa, bu durum öteleme ile ifade edilir.
   - Örneğin, bir araç belirli bir hızla hareket ederken, başlangıç konumunu değiştirerek (öteleyerek) farklı senaryoları analiz edebiliriz.

2. **Kimya - Reaksiyon Kinetiği:**
   - Kimyasal reaksiyonların hızları ve konsantrasyon değişimleri doğrusal fonksiyonlarla modellenebilir. Bir reaksiyonun başlangıç konsantrasyonunun değiştirilmesi, öteleme olarak yorumlanabilir ve bu durum reaksiyonun seyrini etkiler.

3. **Biyoloji - Popülasyon Dinamiği:**
   - Bir popülasyonun büyüme veya azalma hızı doğrusal fonksiyonlarla modellenebilir. Başlangıç popülasyonunun değiştirilmesi, öteleme anlamına gelir ve bu durum popülasyonun uzun vadeli dinamiklerini etkileyebilir.

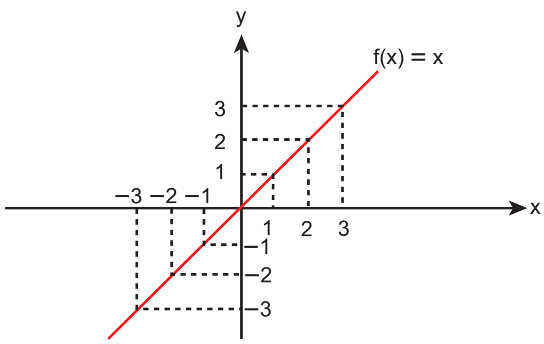
f(x) = x fonksiyonu

Gerçel sayılarda tanımlı f(x) = x bir doğrusal fonksiyondur. Doğrusal fonksiyonların grafiklerini oluştururken f(x) = x fonksiyonundan yararlanılabilir. f(x) = x fonksiyonunun grafiğine dönüşümler uygulanarak tüm doğrusal fonksiyonların grafiklerine ulaşılabilir.

f(x) = x fonksiyonununda bağımlı ve bağımsız değişkenlerin aldığı değerler.

x	$-\infty$ ... $-\sqrt{5}$	-1	0	3	$\frac{21}{4}$	... ∞
y = f(x)	$-\infty$ ... $-\sqrt{5}$	-1	0	3	$\frac{21}{4}$	... ∞

f(x) = x grafiği;

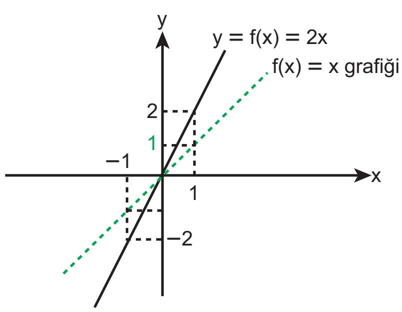


f(x) = a • x fonksiyonu:

f(x) = 2x grafiği için tablo oluşturalım.

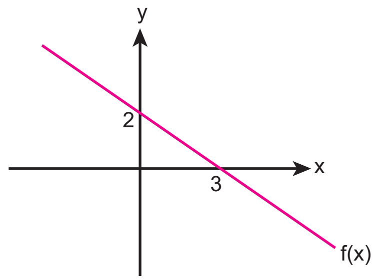
x	$-\infty$ ... $-\sqrt{5}$	-1	0	3	$\frac{21}{4}$	... ∞
y = f(x)	$-\infty$ ... $-2\sqrt{5}$	-2	0	6	$\frac{21}{2}$	... ∞

f(x) = 2x grafiği;

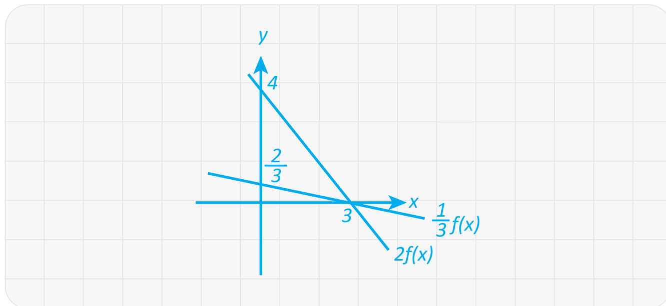


Buradan y = f(x) grafiğinden y = a • f(x) grafiğine geçerken f(x) değerlerini a katına çıkararak y ler oluşturulduğu anlaşılır.

Örnek 1



Şekilde verilen f(x) fonksiyonuna göre, y = 2f(x) ve $y = \frac{1}{3}$ f(x) grafiklerini çiziniz.

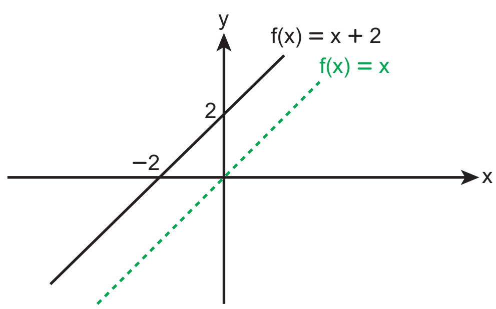


f(x) = x ± b fonksiyonu:

f(x) = x + 2 grafiği için tablo oluşturalım.

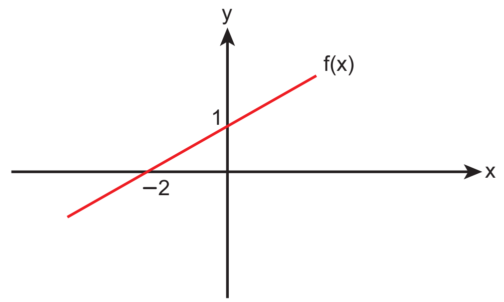
x	$-\infty$ ... $-\sqrt{5}$	-1	0	3	$\frac{21}{4}$	... ∞
y = f(x)	$-\infty$ ... $-\sqrt{5}+2$	1	2	5	$\frac{29}{4}$	... ∞

f(x) = x + 2 grafiği;

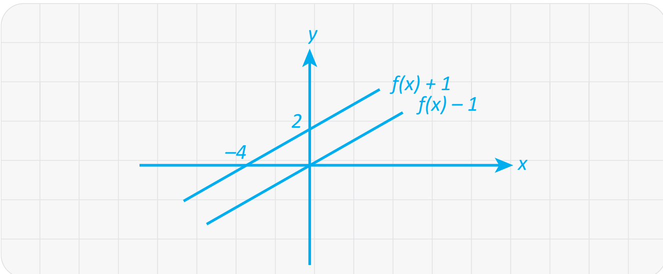


Buradan y = f(x) grafiğinden y = f(x) + b grafiğine geçerken f(x) grafiğinin b birim yukarı y = f(x) − b grafiğine geçerken f(x) grafiğinin b birim aşağı öteleneceği anlaşılır.

Örnek 2



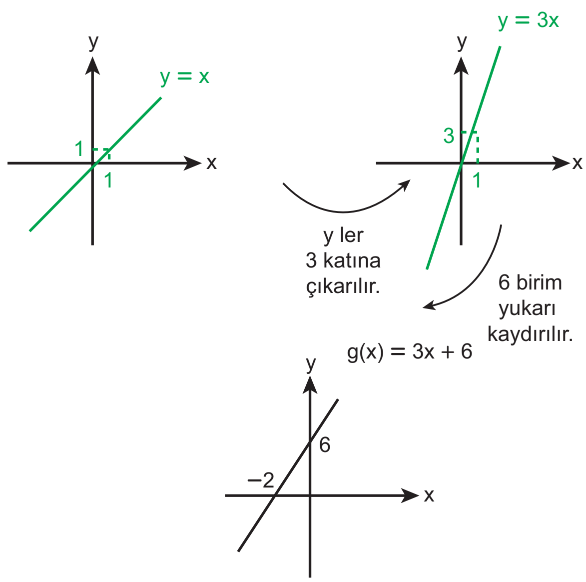
Şekilde verilen f(x) fonksiyonuna göre, y = f(x) + 1 ve y = f(x) — 1 grafiklerini çiziniz.



f(x) = ax + b fonksiyonu

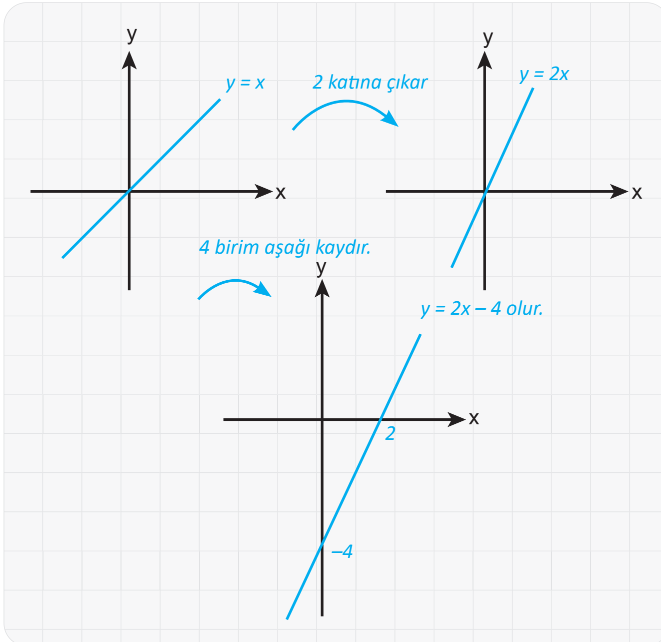
f(x) = x grafiğinden yola çıkarak g(x) = ax + b grafiğini çizebilmek için önce y ler a katına çıkarılarak y = ax grafiği çizilir, ardından grafik b birim yukarı ötelenir.

Örneğin; g(x) = 3x + 6 grafiği bu metodlarla aşağıdaki gibi çizilir.

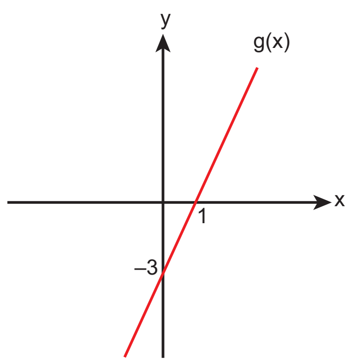


Örnek 3

f(x) = 2x — 4 grafiği dönüşüm metoduyla çiziniz.



Örnek 4



f(x) = x fonksiyonuna hangi dönüşümler uygulanarak şekildeki g(x) fonksiyonu elde edilir ?

y ler üç katına çıkarılmıştır. y = 3x

Sonra 3 birim aşağı doğru ötelenmiştir. y = 3x – 3

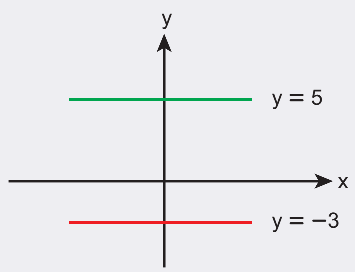
Tanım

f: R → R, f(x) = ax + b ve b∈ R olmak üzere; a = 0 için f(x) = b

biçimindeki fonksiyonlara sabit fonksiyon denir.

Sabit fonksiyonlarda doğrusal fonksiyonlardır.

Örneğin; y = 5 , y = —3 doğrularının grafikleri aşağıdaki doğrulardır.

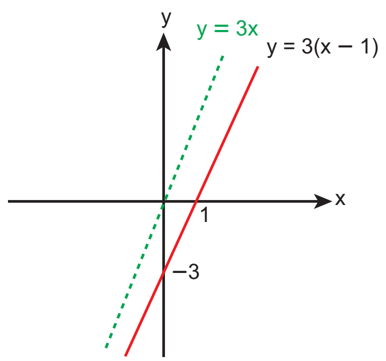


f(x) = a (x ± r) fonksiyonu

y = 3(x—1) grafiği için tablo oluşturalım.

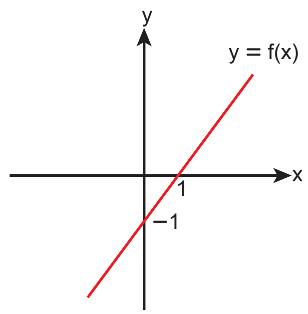
x	—∞	...	—2	0	1	3	...	∞
y = f(x)	—∞	...	—9	—3	0	6	...	∞

f(x) = 3(x —1) grafiği;

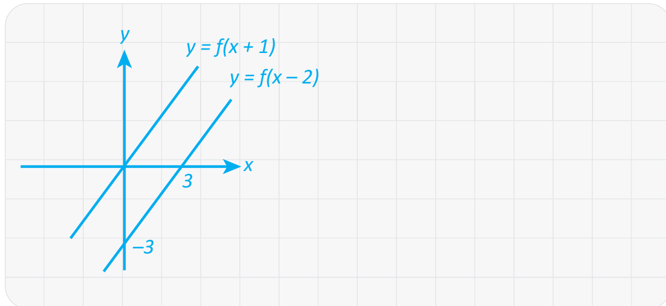


Buradan y = f(x) grafiğinden y = f(x — r) grafiğine geçerken f(x) grafiğinin sağa doğru r birim, y = f(x + r) grafiğine geçerken f(x) grafiğinin sola doğru r birim öteleneceği anlaşılır.

Örnek 5



Verilen f(x) fonksiyonuna göre y = f(x+1) ve y = f(x—2) grafiklerini çiziniz.



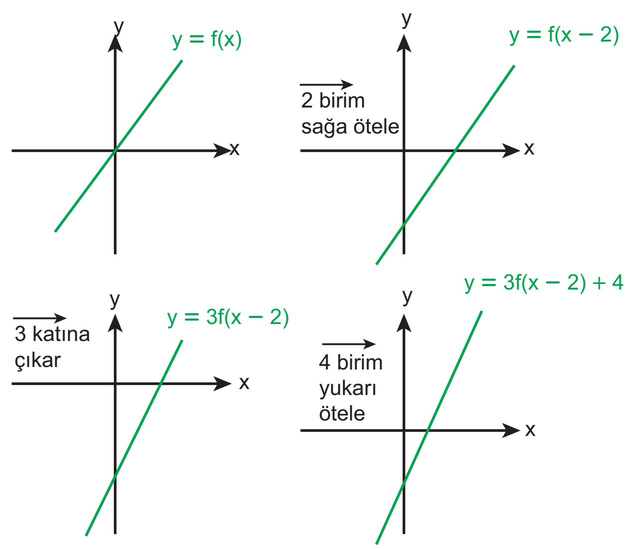
g(x) = a • f(x ± r) ± k fonksiyonu

g(x) grafiğini çizmek için;

- Grafik sağa ya da sola doğru r birim ötelenir.
- y ler a katına çıkarılır.
- Grafik yukarı ya da aşağı doğru k birim ötelenir.

Örneğin; f(x) = x fonksiyonu 3 • f(x — 2) + 4 fonksiyonuna

dönüştürmek için f(x) fonksiyonu 2 birim sağa ötelenir, 3 katına çıkarılır ve 4 birim yukarı ötelenir.



Örnek 6

Aşağıda verilen tabloları doldurunuz.

Fonksiyon / Nitel özellik	$f(x) = x$	$g(x) = 2x$	$h(x)=2x-6$	$m(x)=2x+6$	$n(x) = \frac{-x}{2} + 5$
Tanım Kümesi (Aralığı)	*R*	*R*	*R*	*R*	*R*
Görüntü Kümesi (Aralığı)	*R*	*R*	*R*	*R*	*R*
Sıfırı	*0*	*0*	*3*	*–3*	*10*
Artan mı? Azalan mı?	*Artan*	*Artan*	*Artan*	*Artan*	*Azalan*
Maksimum Değeri	∞	∞	∞	∞	∞
Birebir mi?	*Evet*	*Evet*	*Evet*	*Evet*	*Evet*
Pozitif değer aralığı	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$	$(3, \infty)$	$(-3, \infty)$	$(-\infty, 10)$
Negatif değer aralığı	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 3)$	$(-\infty, -3)$	$(10, \infty)$

Parçalı Tanımlı Fonksiyon

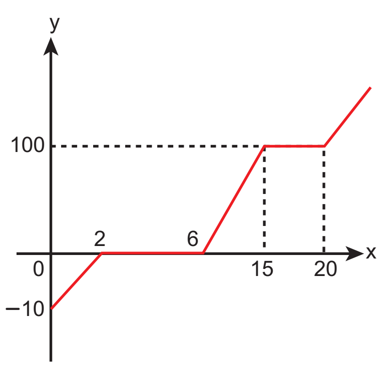
Tanım kümesi alt aralıklara parçalanmış ve her bir alt aralık için farklı bir kural ile tanımlanan fonksiyonlara denir.

Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 0 \\ 7x - 4, & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu parçalı fonksiyondur. Burada 0 dan küçük değerler için $f(x) = 2x + 2$ kuralı geçerli iken , 0'a eşit ve 0 dan büyük değerler için $f(x) = 7x - 4$ kuralı geçerlidir.

Günlük hayatta bir çok durumdan parçalı fonksiyona örnek teşkil edecek fonksiyon modellemeleri vardır. Örneğin; bir miktar buzun ısıtılarak buhar haline getirilmesine ait zamana (dakika) bağlı sıcaklık (°C) değişimini ifade eden f fonksiyonu



Sıcaklık	Zaman
-10	0
-5	1
0	2
0	3
0	4
0	5
0	6
10	7
20	8
.	.
.	.
.	.
100	15

Örnek 7

$f: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ,x \text{ rasyonel ise} \\ x^2 + 1 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre $f\left(\frac{5}{2}\right) + f(\sqrt{2})$ ifadesinin değeri kaçtır?

A)3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2.\frac{5}{2} - 1 = 4$ $\quad f(\sqrt{2}) = 2 + 1 = 3$ $\quad 4 + 3 = 7$ olur.

Cevap D

Örnek 8

$f: R \to R$ tanımlı bir fonksiyondur.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < -1 \\ ax + 3, & -1 \leq x < 3 \\ 4x - 1, & 3 \leq x \end{cases}$$

$f(-2) + f(2) + f(3) = 0$ olduğuna göre a değeri kaçtır?

A) −1 B) −2 C) −3 D) −4 E) −5

$2 . (-2) + a + 2a + 3 + 4 . 3 - 1 = 1$
$-4 + 3a + 3 + 12 - 1 = 1$
$3a + 9 = 0$
$3a = -9$
$a = -3$ bulunur.

Cevap C

Örnek Cevap Anahtarı

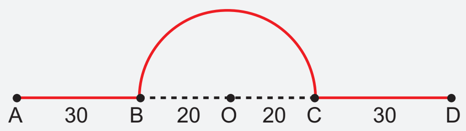
3. 2 katına çıkarıp, 4 birim aşağı öteleyelim.
4. 3 katına çıkarılır ve 3 birim aşağı ötelenir.
7. D
8. C

Etkinlik

Etkinlik İsmi : Hareketli Bisiklet Fonksiyonu

Amacı : Doğrusal ve Parçalı Fonksiyonların modellenmesi, grafiklerinin çizilmesi ve problem çözebilme

A noktasından sabit saniyede 3 metre hızla hareket eden bir bisikletli B ve C noktalarından geçerek D noktasına ulaşmıştır. Yolun B ile C arasındaki yokuş olan kısmı O merkezli 20 metre yarıçaplı bir yarım çember biçimindedir. (π = 3 alınız.)

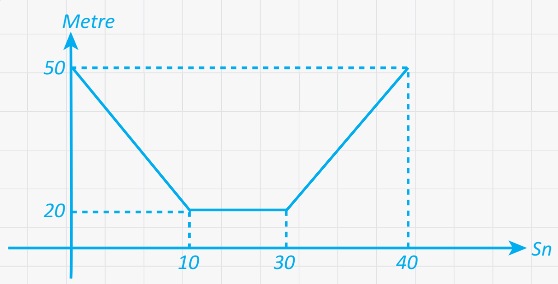


Buna göre,

a) A noktasından hareket eden bisikletlinin hareketi boyunca O noktasına uzaklığını zamana bağlı gösteren f fonksiyonunu yazınız.

$$f(x) = \begin{cases} 50 - 3x, & 0 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 30 \\ 20 + 3 . (x - 30) & 30 < x \leq 40 \end{cases}$$

b) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



c) f(2) + f(4) + f(16) kaçtır?

f(2) = 44

f(4) = 38   *44 + 38 + 20 = 102 bulunur.*

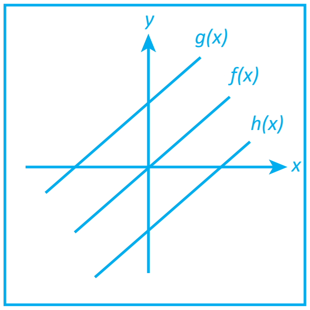
f(16) = 20

1. g: R → R, g(x) = x + 4

h: R → R, h(x) = x - 4 fonksiyonları veriliyor.

f: R → R, f(x) = x fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak

g ve h fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz ve grafikten yararlanarak eğimlerini karşılaştırınız.



f(x)= x, 4 birim yukarı ötelenerek g(x), 4 birim aşağı ötelenerek h(x) fonksiyonu bulunur.

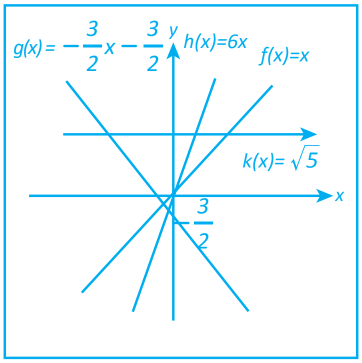
Tüm fonksiyonların eğimleri birbirine eşittir.

2) g: R → R, g(x) = $-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

h: R → R, h(x) = 6x

k: R → R, k(x) = $\sqrt{5}$ fonksiyonları veriliyor.

a) f: R → R, f(x) = x fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak **g ve h fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz ve grafikten yararlanarak eğimlerini karşılaştırınız.**



f(x) = x fonksiyonu 6 ile çarpılarak h(x), $-\frac{3}{2}$ ile çarpılıp $-\frac{3}{2}$ birim aşağı ötelenerek g(x) bulunur.

K(x) = $\sqrt{5}$ de sabit fonksiyondur.

Eğimi en büyük olan h(x), en küçük olan g(x) dir.

b) **g, h ve k fonksiyonlarının varsa sıfırlarını, eksenleri kestiği noktalarını ve maksimum minumum değerlerini bulunuz.**

$g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ $x = -1$, g(x) fonksiyonunun sıfırıdır.

$h(x) = 6x = 0$ $x = 0$ sıfırıdır.

k(x) fonksiyonunun sıfırı yoktur.

c) **g, h ve k fonksiyonlarının artan azalan fonksiyonu olduğu aralıkları ve birebir fonksiyon olma durumlarını yazınız.**

g(x) azalan fonksiyondur. h(x) artan fonksiyondur.
k(x) sabit fonksiyondur. g(x) ve h(x) birebirdir.
fakat k(x) birebir değildir.

3. Bir kütüphane kafede üyelere sunulan kullanım seçenekleri tabloda verilmiştir. Kütüphane kullanımının sabit ücreti 300 TL dir. Kütüphane kullanımı olmadan ya da kütüphane kullanımı ile birlikte özel eğitim almak ise bu kafede mevcuttur.

Kullanım seçeneği	Sabit ücret	Özel ders saat ücreti	Ödenecek toplam ücret fonksiyonu
Özel eğitim		250 TL	
Kütüphane ve Özel Eğitim	300 TL	250 TL	
Bir yıl sınırsız kullanım	15.000 TL	–	

Verilenlere göre;

a) **f, h, g fonksiyonlarının tanım ve değer aralıklarını bulunuz.**

f: $Z^+ \to Z^+$, f(x) = 250x

h: $Z^+ \to Z^+$, h(x) = 300 + 250x

g: $Z^+ \to$ [15.000], g(x) = 15.000

b) **f, g ve h fonksiyonlarının birebirliğini, artanlığı ve azalanlığını yorumlayınız.**

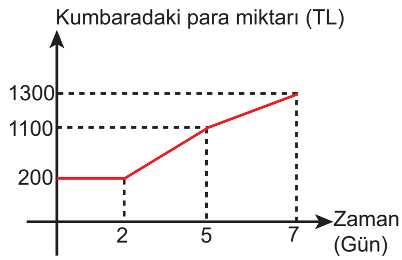
f ve h fonksiyonu birebir g birebir değildir.

f ve h artan fonksiyondur. g sabit fonksiyondur.

c) **f, g ve h fonksiyonlarının sıfırlarını bulunuz.**

f in sıfırı x = 0, h nin ve g nin sıfırı yoktur.

4.



Kumbarasında 200 TL para bulunan Burçe'nin 1 haftalık bayram tatilinde kumbarasındaki para miktarının zamana bağlı grafiği verilmiştir.

Buna göre;

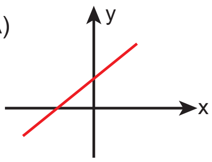
a) **Burçe tatilin hangi günlerinde kumbarasına daha çok para atmıştır?**

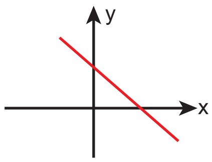
2 – 5 gün aralığının eğimi en büyüktür. buradan 2 – 5 gün aralığında kumbaraya daha çok para atıldığı anlaşılır.

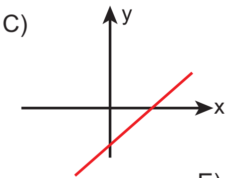
b) **Burçe'nin 1 hafta boyunca kumbarasındaki para miktarını değişimini fonksiyon biçiminde ifade ediniz.**

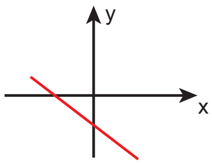
$$f(x) = \begin{cases} 200 \text{ TL} & , 0 \le x \le 2 \\ 200 + 300(x-2) & , 2 < x \le 5 \\ 1100 + 100(x-5) & , 5 < x \le 7 \end{cases}$$

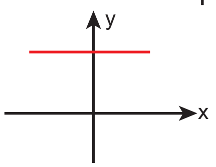
1. **g: R → R, g(x) = −4x + 2 fonksiyonunun grafiği aşağıdaki seçeneklerden hangisine benzerdir?**

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

f(x) = x fonksiyonunun −4 ile çarp ve 2 birim yukarı kaydır.

f(x) = x *f(x) = −4x*

Sonuç 2 birim yukarı kaydır.

Cevap B

2. Bir ilaç vücutta belli bir süre boyunca etkili olur ve zamanla etkisini kaybeder. Bir antibiyotiğin vücutta kalma süresine bağlı fonksiyon;

f: R → R, f(x) = −0,3x + 9 olsun.

x saat cinsinden verildiğine göre bir ilaç alındığında vücutta etkisinin kalmaması için kaç saat geçmelidir?

A) 40 B) 30 C) 25 D) 20 E) 10

f(x) = −0,3 . x + 9 = 0

−0,3x = −9

x = 30 bulunur. *Cevap B*

3. f: [0, 5] → [−22, 8], f(x) = −6x + 8

fonksiyonunun pozitif değerler aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

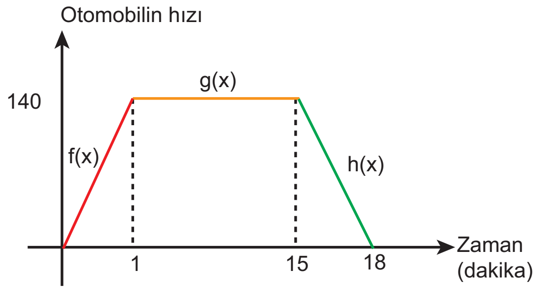
A) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B) $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ C) [0, 1] D) $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ E) [0, 2]

−6x + 8 = 0

$x = \frac{4}{3}$ *fonksiyonunun sıfırıdır. Fonksiyon* $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ *aralığında*

Pozitif değerlidir. *Cevap D*

4. Aşağıda bir otomobilin kalkış, hızlanma ve hız sabitleyici ile yol alma yavaşlama ve durmasını zamana bağlı (dakika) ifade eden f, g, h fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre, f(x), g(x), h(x) fonksiyonlarının eğimlerinin büyükten küçüğe sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x), g(x), h(x) B) f(x), h(x), g(x)
C) g(x), h(x), f(x) D) h(x), g(x), f(x)
E) h(x), f(x), g(x)

f(x) artan, g(x) sabit, h(x) azalan fonksiyondur.

Bu sebeple f(x), g(x), h(x) şeklinde eğimler sıralanır. *Cevap A*

5. Z tam sayılar kümesi olmak üzere

f: Z → Z fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \text{ ise} \\ x + 2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f fonksiyonu birebirdir.
II. f fonksiyonu x ≥ 0 için artandır.
III. f fonksiyonu maksimum değerini x ≥ 0 için verilen değerde alır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız III
D) II ve III E) I, II ve III

I. f birebir. Her değer farklı bir sayı ile eşleşiyor.

II. f artan $\forall x_1, x_2$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyor.

III. Maksimum değeri

f(x) = x + 2 için ∞ da alır. *Cevap E*

Cevap Anahtarı

1. B	2. B	3. D	4 A	5. E